



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
LAUREA IN FISICA

RUFFINO FRANCESCO

PROPRIETÀ DI TRASPORTO ELETTRONICO
IN SISTEMI MESOSCOPICI

TESI DI LAUREA

Relatori:

Chiar.ma Prof.ssa M. G. Grimaldi

Dott. G. Piccitto

ANNO ACCADEMICO 2002-2003

SOMMARIO

INTRODUZIONE.....	1
CAPITOLO I: TUNNELLING TRANSPORT.....	6
1.1 INTRODUZIONE.....	6
1.2 GRADINO DI POTENZIALE.....	7
1.3 LA MATRICE DI TRASMISSIONE T.....	10
1.4 CONSIDERAZIONI IMPORTANTI SULLA MATRICE DI TRASMISSIONE.....	13
1.5 CORRENTE E CONDUTTANZA.....	16
1.5.1 CORRENTE IN UNA DIMENSIONE.....	17
1.5.2 CORRENTE IN DUE E TRE DIMENSIONI.....	20
1.6 TUNNELLING RISONANTE.....	22
1.6.1 COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE IN UNA DIMENSIONE.....	24
1.7 TRASPORTO COERENTE IN SISTEMI A MOLTI CANALI.....	27
1.7.1 DUE LEADS A MOLTI CANALI: LA QUANTIZZAZIONE DELLA CONDUTTANZA...	27
1.7.2 SISTEMI A MOLTI LEADS: LA FORMULA DI LANDAUER.....	32
1.8 CONCLUSIONI.....	36

CAPITOLO II: EFFETTI DI ELETTRONE SINGOLO IN QUANTUM DOTS.....	37
2.1 INTRODUZIONE.....	37
2.2 TECNICHE DI FABBRICAZIONE E DI MISURA.....	38
2.3 TEORIA DEL TRASPORTO ATTRAVERSO QUANTUM DOTS.....	42
2.3.1 PREMESSA.....	43
2.3.2 TUNNELLING DI CARICHE QUANTIZZATE.....	44
2.3.3 QUANTIZZAZIONE DEI LIVELLI ENERGETICI.....	47
2.3.4 REGIMI DI FUNZIONAMENTO DI UN QUANTUM DOT.....	48
2.3.5 PROPRIETÁ DI TRASPORTO IN SISTEMI DI QUANTUM DOTS IN REGIME DI COULOMB BLOCKADE CLASSICO: MODELLO ORTODOSSO.....	49
2.3.6 EFFETTI OLTRE IL MODELLO ORTODOSSO IN SISTEMI DI QUANTUM DOTS.....	52
2.3.7 COULOMB BLOCKADE E COULOMB STAIRCASE IN UNA DOPPIA GIUNZIONE TUNNEL.....	55
2.3.8 COULOMB BLOCKADE E COULOMB STAIRCASE IN UN SET.....	63
2.3.9 COULOMB BLOCKADE IN QUANTUM DOTS A SEMICONDUCTTORE.....	70
2.4 ACCENNO ALLE APPLICAZIONI DEI QUANTUM DOTS.....	75
2.5 CONCLUSIONI.....	76

CAPITOLO III: PROPRIETÁ DI TRASPORTO ELETTRONICO IN SISTEMI DISORDINATI DI NANOCRISTALLI METALLICI, TEORIA E DATI SPERIMENTALI.....	78
3.1 INTRODUZIONE.....	78
3.2 TEORIA.....	79
3.2.1 TUNNELLING E COULOMB BLOCKADE IN SISTEMI DI MOLTI DOTS.....	79
3.2.2 INTERAZIONE TRA GLI ELETTRONI DI DOTS COSTITUENTI SISTEMI UNI- E BI- DIMENSIONALI.....	81
3.2.2.a SISTEMI UNIDIMENSIONALI DI DOTS.....	81
3.2.2.b SISTEMI BIDIMENSIONALI DI DOTS.....	84
3.2.3 TRASPORTO COLLETTIVO IN ARRAYS DI PICCOLI DOTS METALLICI: MODELLO DI MIDDLETON E WINGREEN.....	87
3.2.4 GENERALIZZAZIONE DEL MODELLO DI MIDDLETON E WINGREEN ED EFFETTO DELLA TEMPERATURA SUL TRASPORTO.....	103
3.3 IMPORTANTI DATI SPERIMENTALI PRESENTI IN LETTERATURA.....	108
3.4 CONCLUSIONI.....	116

**CAPITOLO IV: PROPRIETÁ DI TRASPORTO
ELETTRONICO IN SISTEMI DISORDINATI DI
NANOCRISTALLI METALLICI, ESPERIMENTI
ORIGINALI.....119**

4.1 INTRODUZIONE.....119
4.2 PREPARAZIONE DEL CAMPIONE.....120
4.2.1 DEPOSIZIONE.....120
4.2.2 TRATTAMENTI TERMICI.....122
4.2.3 CARATTERIZZAZIONE STRUTTURALE.....123
4.3 CARATTERISTICHE I-V DEL CAMPIONE.....135
4.4 ANALISI DEI DATI ALLA LUCE DEI
MODELLI TEORICI SVILUPPATI.....139
4.5 CONCLUSIONI.....154

CONCLUSIONI.....156

**APPENDICE A: TEORIA DEL TUNNELLING
TRANSPORT PER L'ANALISI DEL FENOMENO DI
COULOMB BLOCKADE: MASTER EQUATION.....159**

**APPENDICE B: DERIVAZIONE E PROPRIETÁ
DELL'EQUAZIONE DI KARDAR-PARISI-ZHANG E SUA
RELAZIONE CON IL MODELLO DI MIDDLETON E
WINGREEN.....165**

APPENDICE C: CALCOLO DELLA DENSITÀ DI GRANI IN UN FILM.....	172
NOTE.....	175
BIBLIOGRAFIA.....	177
RINGRAZIAMENTI.....	188

Osservazioni:

Nel testo i numeri in parentesi quadra indicano riferimenti bibliografici e numeri in parentesi tonda riportati come apice indicano delle note. Sia le note che i riferimenti bibliografici sono riportate alla fine (pag.175 e pag. 177).

INTRODUZIONE

Una nanostruttura può essere definita come un materiale i cui elementi strutturali (clusters, molecole) abbiano dimensioni nel range da 1 a 100 nm. Il notevole aumento, negli ultimi anni, dell'interesse scientifico ed industriale in sistemi di questo tipo deriva dalle notevoli variazioni delle proprietà elettriche, ottiche, magnetiche che si riscontrano in un dispositivo a stato solido allorché le sue dimensioni vengano ridotte da quelle macroscopiche a quelle nanoscopiche, range, quest'ultimo, in cui il sistema contiene un numero molto piccolo di atomi (qualche centinaia). La "nanoscienza" può essere vista come la naturale evoluzione dello studio rivolto verso i sistemi a bassa dimensionalità e guidata dalla fondamentale questione di come si comportino gli elettroni quando questi siano confinati in regioni di spazio con dimensioni paragonabili alla loro lunghezza d'onda di deBroglie e sottoposti alle più svariate sollecitazioni (campi elettrici, campi magnetici, radiazioni elettromagnetiche,). Essa si estende dallo studio fisico dei sistemi nanoscopici a quello chimico, biologico, ingegneristico e prettamente industriale, delineando un mondo, quello nanoscopico, in cui il "senso comune" è spesso da mettere da parte.

A riprova del fondamentale interesse nato negli ultimi anni in questo innovativo campo sono stati indetti, in varie parti del mondo, tutta una serie di progetti di studio e ricerca in questo senso: nel 1992 in Giappone è stato indetto un programma di studi decennale denominato *Research and Development of Ultimate Manipulation of Atoms and Molecules*, seguito, nel 2000, dal progetto statunitense denominato *US National Nanotechnology Initiative* e da tutta una serie di progetti europei a carattere nazionale ed internazionale (*Microelectronics Research Initiative, Physics and Technology of Mesoscale Systems, Synthesis and Processing of Nanoparticle Materials,...*).

Come accennato, lo scopo fondamentale della nanotecnologia è quello di comprendere la natura intima dei sistemi su scala nanoscopica

permettendone, così, la manipolazione. Ciò comporta, naturalmente, la comprensione delle proprietà fisiche e dei processi di interazione a livello dei singoli atomi, delle singole molecole, dei singoli clusters (quantum dots), dei singoli nanotubi o delle singole biomolecole, e di come queste proprietà varino al variare delle loro dimensioni e delle loro stesse interazioni (dato che tali proprietà, in questo range nanometrico, sono estremamente sensibili a tali fattori).

L'analisi sperimentale dei fenomeni caratteristici dei suddetti sistemi richiede, dunque, la loro manipolazione e caratterizzazione a livello atomico e molecolare: ciò giustifica il notevole sviluppo tecnologico avvenuto negli ultimi decenni, a partire dalla realizzazione dello Scanning Tunnelling Microscope (STM) nel 1986 che permette la risoluzione di singoli atomi o singole molecole. Questo notevole sviluppo tecnologico, avendo permesso l'analisi sperimentale dei sistemi nanoscopici, ha permesso, di conseguenza, un altrettanto notevole sviluppo della nanoscienza. Un secondo aspetto, che ha notevolmente contribuito alla comprensione del mondo nanoscopico, è indubbiamente stato il campo della fisica mesoscopica. Essa studia gli effetti della "coerenza quantistica" nelle proprietà di sistemi conduttori di dimensioni nanometriche. I concetti fondamentali sviluppati nell'ambito della fisica mesoscopica (e che risalgono a R. Landauer[73]) e che sono direttamente applicabili ai sistemi nanoscopici, sono quelli per cui la conduttanza elettrica è interpretabile in termini di probabilità di trasmissione per onde viaggianti e che la conduttanza stessa abbia una natura quantizzata. In particolare, questo ultimo concetto, richiede una profonda rivisitazione della familiare legge di Ohm, per cui la resistenza di un conduttore scala proporzionalmente alla sua lunghezza: infatti, in un sistema nanoscopico la distanza percorsa da un elettrone tra due eventi di scattering è tipicamente più grande delle stesse dimensioni del sistema (*trasporto balistico*) ed in questa condizione la resistenza del sistema non è più semplicemente direttamente proporzionale alla sua lunghezza. Per tali sistemi il carattere stesso della resistenza cambia concettualmente ed una sua appropriata descrizione richiede l'analisi della natura ondulatoria degli elettroni. È importante osservare che la teoria classica relativa al trasporto elettronico in sistemi mesoscopici, che ha come

risultati fondamentali la “master equation” e la rate di tunnelling calcolata tramite la regola d’oro di Fermi (appendice A), utilizza un approccio perturbativo. Un tale approccio descrive bene il trasporto coerente degli elettroni attraverso il sistema mesoscopico in esame ma esclude dall’analisi tutti gli effetti che possono rompere la coerenza dei portatori (*effetti di disordine*: scattering inelastici, temperatura, interazione tra i componenti del sistema). È evidente l’importanza della formulazione di teorie che vadano oltre un tale limite ed è questo uno degli scopi principali del presente lavoro. Inoltre, in tali sistemi, la quantizzazione della carica ed i processi di trasporto della stessa per tunnelling portano a tutta una serie di innovativi fenomeni (Coulomb blockade, Coulomb staircase, Coulomb oscillations,...) che hanno contribuito alla rivoluzione della scienza dei sistemi a bassa dimensionalità. Di conseguenza un altro scopo fondamentale di questo lavoro è quello di comprendere la natura fisica di tali fenomeni cercando, altresì, di capire come essi si manifestino sperimentalmente in particolari campioni.

In sintesi, l’interesse principale che ha portato a questo lavoro è quello di dare una descrizione teorica e sperimentale delle più recenti ed importanti conquiste della nanofisica relativamente alla risposta degli elettroni presenti in un dispositivo nanoscopico quando questi siano sollecitati da un campo elettrico (si osservi, quindi, che in questo lavoro non vengono studiati gli effetti su tali sistemi determinati ad esempio da un campo magnetico o da radiazione elettromagnetica).

I primi due capitoli sono di carattere teorico e generale: il loro scopo è quello di dare una descrizione sintetica e generale dei sistemi nanoscopici e delle tipologie di studi elettrici classici, teorici e sperimentali, che su di essi vengono effettuati. Essi, essenzialmente, sono basati su una ricerca di tipo bibliografica e vogliono introdurre il lettore ai concetti base relativi alla fisica mesoscopica ed agli effetti di elettrone singolo in quantum dots.

In particolare il primo capitolo è una introduzione al “*tunnelling transport*”, cioè alla teoria di trasporto coerente in sistemi mesoscopici: esso intende illustrare i concetti alla base del trasporto elettronico coerente e quindi in quei sistemi nanoscopici in cui il trasporto di cariche avviene per tunnelling

e tali che essi siano privi di qualsiasi causa che possa determinare l'incoerenza dei portatori di carica durante i processi di trasporto. Il concetto, probabilmente più importante, che viene introdotto e giustificato nel suddetto capitolo è quello della quantizzazione della conduttanza. Tutto quanto esposto in questo capitolo riprende, in breve, tutta una serie di lavori classici in questo campo e riportati in bibliografia.

Il secondo capitolo è rivolto alla descrizione del prototipo di sistema nanoscopico: il quantum dot. Oltre alla descrizione relativa alla struttura e alla fabbricazione di quantum dots, si introducono e giustificano, in tale capitolo, gli aspetti sperimentali e teorici dei fondamentali effetti di elettrone singolo che hanno luogo nei sistemi nanoscopici: *Coulomb blockade*, *Coulomb staircase*, *Coulomb oscillations*.

Mentre il primo capitolo si occupa, in sostanza, di indagare alcuni aspetti relativi a sistemi che possono essere considerati di molti dots ma perfettamente *ordinati* ed il secondo di introdurre i fenomeni elettronici in sistemi nanoscopici per semplicità costituiti da un unico o pochi dots (qualche centinaia), gli ultimi due capitoli si prefiggono lo scopo di introdurre, il terzo, dei modelli teorici per la descrizione dei dati sperimentali relativi a sistemi ben più complessi e realistici e cioè sistemi nanostrutturati di multi quantum dots con presenza di disordine, il quarto questi stessi dati sperimentali.

In particolare il quarto capitolo rappresenta il cuore nonché la parte più originale di questo lavoro: in esso si presentano ed analizzano dati sperimentali originali relativi ad un sistema anch'esso originale rispetto ai soliti sistemi presenti nella stessa letteratura. Ciò che si metterà in evidenza saranno le analogie e differenze tra le tipologie solite di sistemi di nanocristalli metallici presentati e studiati tipicamente in letteratura ed il sistema originale da noi analizzato e come i modelli teorici sviluppati nel capitolo III siano adatti, con opportune limitazioni, per la descrizione dei dati sperimentali relativi al trasporto elettronico in questo sistema.

Si vuol, infine, sottolineare come sia fondamentale la comprensione dei fenomeni inerenti alla conduzione elettronica in sistemi di molti dots in

presenza di disordine: esso è, oggi, uno dei campi di studio sicuramente più ferventi, in quanto, alla sua comprensione è subordinata la comprensione di tutta una altra serie di aspetti della nanoscienza che vanno dal campo della *quantum computing* a quello più generale della *nanoelettronica*.

CAPITOLO I

TUNNELLING TRANSPORT

1.1 INTRODUZIONE

Lo scopo di questo capitolo è quello di illustrare, nelle sue linee generali, il comportamento di elettroni liberi quando questi, durante il loro moto, incontrino barriere di potenziale. Questo problema verrà trattato ricorrendo al formalismo della matrice di trasmissione T che semplifica notevolmente il calcolo del coefficiente di trasmissione per una sequenza arbitraria di barriere. Applicazioni particolari e fondamentali della teoria del tunnelling transport qui sviluppata sono costituite dallo studio del trasporto elettronico via tunnel attraverso eterostrutture e sistemi complessi di multi quantum dots. Questa teoria è, inoltre, capace di spiegare il fenomeno del *tunnelling risonante* che si manifesta in queste stesse strutture.

In questo stesso ambito verrà derivato uno dei più famosi risultati riguardanti i sistemi a bassa dimensionalità: *la quantizzazione della conduttanza*.

Una importante restrizione che limita fortemente la teoria qui sviluppata risiede nell'ipotesi (che semplifica in modo fondamentale tutta la trattazione) secondo cui durante tutti i processi di tunnelling subiti dagli elettroni, questi stessi rimangono *coerenti*. Evidentemente la realtà è ben lontana da una situazione del genere: gli elettroni che viaggiano entro il mezzo subiscono inevitabilmente scattering (con impurezze, fononi, difetti) ed interazioni che distruggono la

loro coerenza durante tutti i processi di tunnelling.

1.2 GRADINO DI POTENZIALE

Si supponga che un elettrone di energia E che viaggia lungo la direzione $+z$ incontri a $z = 0$ un gradino di potenziale, come rappresentato in figura 1.1, in cui il potenziale $V(z)$ varia da 0 per $z < 0$ ad un valore positivo V_0 per $z > 0$. Classicamente l'elettrone dovrebbe essere sempre riflesso se la sua energia è $E < V_0$, mentre dovrebbe sempre oltrepassare il gradino se $E > 0$. Questo stato di cose viene nettamente modificato dalla natura ondulatoria degli elettroni in meccanica quantistica.

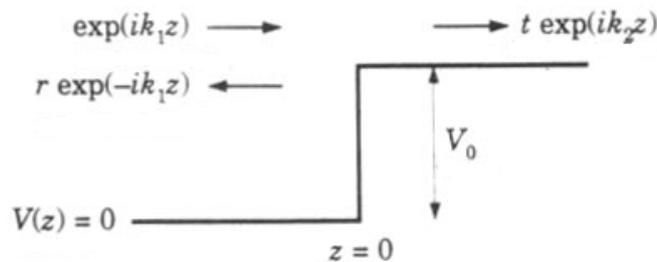


Fig.1.1 Un gradino di potenziale a $z = 0$ con energia potenziale $V = 0$ per $z < 0$ e $V = V_0$ per $z > 0$. Un'onda incide sul gradino da sinistra dando origine ad un'onda riflessa verso sinistra ed una trasmessa verso destra.[8]

L'onda incidente sul gradino da sinistra verso destra viene rappresentata dall'esponentiale $\exp(ik_1 z)$. Il fattore temporale $\exp(-iEt/\hbar)$ è lo stesso per tutte le onde e verrà dunque trascurato. Le onde uscenti sono due: un'onda riflessa $r\exp(-ik_1 z)$ nella regione 1 ed una trasmessa $t\exp(ik_2 z)$ nella regione 2. I coefficienti r e t sono, rispettivamente, le ampiezze di riflessione e trasmissione e sono in generale numeri complessi. I numeri d'onda sono rispettivamente definiti da $k_1^2 = 2mE/\hbar^2$ e $k_2^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2$. Si assuma

innanzitutto $E > V_0$ tale che k_2 sia reale. In questa ipotesi non è difficile risolvere il problema di Schrödinger relativo al caso illustrato schematicamente in figura 1.2:

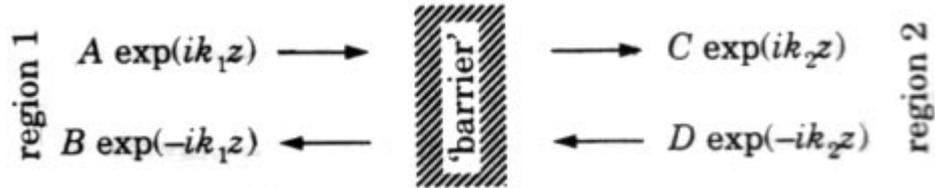


Fig.1.2 Un problema generale di trasmissione con una “barriera” di natura non specificata che separa la regione 1 (sulla sinistra) dalla regione 2 (sulla destra). In entrambe le regioni sono rappresentate onde incidenti ed uscenti. Il potenziale è supposto costante lontano dalla barriera cosicchè le funzioni d’onda sono nelle due regioni onde piane ma con differenti numeri d’onda k_1 e k_2 . [8]

Due delle ampiezze A, B, C, e D devono essere conosciute e le altre due possono allora essere ricavate. Le soluzioni dell’equazione di Schrödinger per il problema in esame sono:

$$\psi(z) = A \exp(ik_1 z) + B \exp(-ik_1 z) \quad \text{per } z < 0 \quad (1.1)$$

$$\psi(z) = C \exp(ik_2 z) + D \exp(-ik_2 z) \quad \text{per } z > 0 \quad (1.2).$$

Naturalmente si deve richiedere che la funzione d’onda e la sua derivata prima siano continue in ogni punto. Imponendo tali condizioni e se le onde di sinistra sono conosciute, allora i coefficienti delle onde a destra possono essere dedotti risolvendo le equazioni:

$$C = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) A + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) B \quad (1.3)$$

$$D = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right)A + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)B \quad (1.4).$$

La situazione di figura 1.1 si risolve da qui ponendo semplicemente $A = 1$, $B = r$, $C = t$ e $D = 0$, ed ottenendo

$$t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}, \quad r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad (1.5).$$

Di solito è più utile conoscere il flusso di elettroni piuttosto che le ampiezze d'onda. Un' onda descritta da $F\exp(ikx)$ trasporta una densità di corrente pari a $\left(\frac{\hbar k}{m}\right)|F|^2$. Quindi i coefficienti che esprimono il flusso trasmesso ed il flusso riflesso (coefficiente di trasmissione e di riflessione), dati dai rapporti delle densità di corrente, sono:

$$T = \frac{\left(\frac{\hbar k_2}{m}\right)|t|^2}{\left(\frac{\hbar k_1}{m}\right)} = \frac{k_2}{k_1}|t|^2 = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (1.6)$$

$$R = \frac{\left(\frac{\hbar k_1}{m}\right)|r|^2}{\left(\frac{\hbar k_1}{m}\right)} = |r|^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \quad (1.7).$$

Inoltre è ovvio che debba essere:

$$R + T = 1 \quad (1.8)$$

come si può facilmente verificare utilizzando (1.6) e (1.7).

Nel caso $E < V_0$, le onde nella regione 2 sono descritte dagli esponenziali $C\exp(-\kappa_2 z)$ (decrescente) e $D\exp(\kappa_2 z)$ (crescente), essendo

$\kappa_2^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$. In sintesi si può dire che passando dal caso $E > V_0$ a

$E < V_0$, k_2 viene sostituito da $i\kappa_2$. In questo ultimo caso di $E < V_0$, dalle condizioni di matching si deducono le:

$$t = \frac{2k_1}{k_1 + i\kappa_2}, \quad r = \frac{k_1 - i\kappa_2}{k_1 + i\kappa_2} \quad (1.9).$$

Un confronto tra il coefficiente di trasmissione $T(E)$ previsto classicamente e quello previsto quantisticamente è riportato in figura 1.3

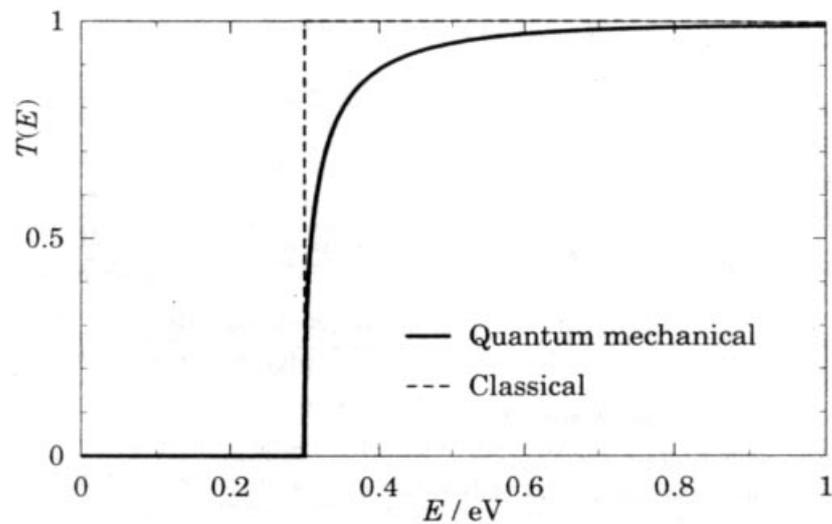


Fig.1.3 Coefficiente di trasmissione $T(E)$ in funzione dell'energia E dell'elettrone incidente relativo ad un gradino di potenziale di altezza 0.3 eV in GaAs. La linea tratteggiata indica la previsione classica, quella continua la quantistica.[8]

1.3 LA MATRICE DI TRASMISSIONE

T

Le relazioni (1.3) ed (1.4) possono essere espresse in termini di una equazione matriciale che permette di ricavare le onde nella regione 2 in funzione di quelle nella regione 1 (figura 1.2):

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = T^{(21)} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^{(21)} & T_{12}^{(21)} \\ T_{21}^{(21)} & T_{22}^{(21)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (1.10).$$

Si osservi l'ordine degli indici in $T^{(21)}$: il significato di questo ordine apparirà chiaro in seguito. Una delle ragioni fondamentali dell'introduzione della matrice di trasmissione sta nella semplicità di moltiplicazione delle matrici per la costruzione della matrice totale di trasmissione per un sistema complesso di barriere di potenziale. Un esempio è illustrato in figura 1.4 per tre regioni separate da due barriere di potenziale su cui incidono elettroni:

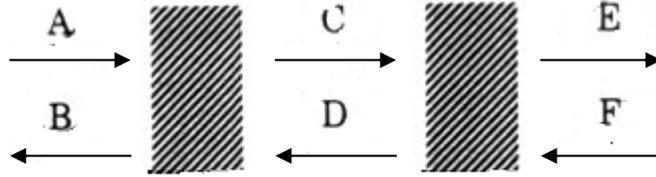


Fig.1.4 Schematizzazione degli elettroni, con i rispettivi coefficienti relativi alle loro funzioni d'onda, in tre regioni in ognuna delle quali l'energia potenziale è costante, separate da due barriere.[8]

Ovviamente per questo caso possono essere scritte le relazioni

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = T^{(21)} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = T^{(32)} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

che combinate danno

$$\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = T^{(32)} T^{(21)} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = T^{(31)} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

avendo posto

$$T^{(31)} = T^{(32)}T^{(21)} \quad (1.13).$$

Ovviamente tale ragionamento può essere esteso ad un sistema con un numero arbitrario di barriere e mostra la semplicità di analisi di un tale sistema con questo approccio matriciale. Ciò diventerà ancor più importante quando si descriverà come i coefficiente di riflessione e di trasmissione dell'intera struttura con un numero arbitrario di barriere possano essere ricavati dalla matrice di trasmissione della stessa struttura.

Ad esempio si può facilmente studiare il gradino di potenziale di figura 1.1 con questo approccio matriciale:

la matrice di trasmissione $T^{(21)}$ per una tale struttura deriva subito dalla (1.3):

$$T^{(21)} = \frac{1}{2k_2} \begin{pmatrix} k_2 + k_1 & k_2 - k_1 \\ k_2 - k_1 & k_2 + k_1 \end{pmatrix} = T(k_2, k_1) \quad (1.14)$$

per $E > V_0$; la matrice di trasmissione per il caso $E < V_0$ si ottiene sostituendo nella (1.14) k_2 con ik_2 . Inoltre, essendo per il gradino $C = t$, $D = 0$, $A = 1$, $B = r$, si ottiene per esso l'equazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = T^{(21)} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

da cui

$$r = -\frac{T_{21}^{(21)}}{T_{22}^{(21)}}, \quad t = \frac{T_{11}^{(21)}T_{22}^{(21)} - T_{12}^{(21)}T_{21}^{(21)}}{T_{22}^{(21)}} \quad (1.16).$$

Una importante osservazione riguarda il fatto che la matrice scritta in precedenza per il gradino è valida quando il gradino stesso si trovi a $z = 0$ ed è utile generalizzare la sua forma quando esso sia in posizione generica $z = d$. Si dicano $T(0)$ la matrice di trasmissione relativa al gradino a $z = 0$ e $T(d)$ quella relativa al gradino a $z = d$. Considerato che le onde elettroniche

incidenti su uno o l'altro gradino differiscono esclusivamente per la fase, dei semplici ragionamenti basati su questa osservazione portano alla seguente conclusione:

$$T(d) = \begin{pmatrix} e^{-ik_2d} & 0 \\ 0 & e^{ik_2d} \end{pmatrix} T(0) \begin{pmatrix} e^{ik_1d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_1d} \end{pmatrix} \quad (1.17).$$

Questa ultima relazione assume una notevole importanza in quanto permette di ricavare la matrice di una struttura complessa quando questa venga considerata come costruita attraverso una serie di gradini (ad esempio una barriera o una serie di barriere di potenziale). Inoltre se il potenziale ed i numeri d'onda sono gli stessi in entrambe le regioni separate dalla struttura allora la formula (1.17) assume la forma ancora più semplice $T(d) = A^{-1}(d)T(0)A(d)$, dove A contiene i fattori di fase: questa è semplicemente una trasformazione di similarità ed in quanto tale preserva le proprietà fisiche del sistema.

1.4 CONSIDERAZIONI IMPORTANTI SULLA MATRICE DI TRASMISSIONE

In generale la determinazione dei quattro elementi della matrice di trasmissione T potrebbe essere complicata. Si vuole qui far vedere come in effetti solo due di questi quattro elementi siano effettivamente indipendenti, cosicché la determinazione di T risulti notevolmente semplificata. Si vuole inoltre mostrare come sia possibile determinare i coefficienti di riflessione e di trasmissione di una qualsiasi struttura tunnel una volta che sia conosciuta la sua matrice di trasmissione. Il ragionamento è fondamentalmente imperniato sui concetti di *conservazione della corrente* e di *invarianza rispetto all'inversione temporale*.

Si consideri una funzione d'onda che soddisfi l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo:

$$\hat{H}\psi(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) \quad (1.18).$$

L'argomento spaziale è irrilevante ed è stato quindi trascurato per semplicità. Si assuma, inoltre, che l'operatore \hat{H} sia reale ed indipendente dal tempo. Allora nella (1.18) cambiando il segno di t e passando ai complessi coniugati si ottiene

$$\hat{H}\psi^*(-t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(-t) \quad (1.19).$$

La forma della (1.19) è identica a quella della (1.18); quindi se $\psi(t)$ è soluzione della equazione di Schrödinger lo deve essere anche $\psi(-t)$: questa è proprio la richiesta dell'invarianza rispetto alla inversione temporale. Si osservi che la richiesta che \hat{H} sia reale non è banale e tale ipotesi fallisce ad esempio in presenza di un campo magnetico.

L'invarianza per inversione temporale ha importanti conseguenze sulla matrice di trasmissione T. Infatti, ricordando che T è definita da

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}A + T_{12}B \\ T_{21}A + T_{22}B \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

allora l'invarianza per inversione temporale richiede che un'altra soluzione sia

$$\begin{pmatrix} D^* \\ C^* \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} B^* \\ A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}B^* + T_{12}A^* \\ T_{21}B^* + T_{22}A^* \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

(il sistema fisico non è cambiato per cui non deve essere cambiata neppure T).

Considerando i complessi coniugati di questa ultima equazione e riordinando i vari termini si ottiene

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{22}^* A + T_{21}^* B \\ T_{12}^* A + T_{11}^* B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{22}^* & T_{21}^* \\ T_{12}^* & T_{11}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (1.22).$$

Confrontando le equazioni (1.20) e (1.22) si ricavano subito le relazioni

$$T_{22} = T_{11}^*, \quad T_{21} = T_{12}^* \quad (1.23)$$

che permettono di scrivere la T in forma generale come

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12}^* & T_{11}^* \end{pmatrix} \quad (1.24).$$

Si può adesso considerare che la conservazione della corrente richiede che valga la relazione (se i numeri d'onda sono gli stessi nelle due regioni separate dalla struttura)

$$|A|^2 - |B|^2 = |C|^2 - |D|^2 \quad (1.25)$$

che si traduce, ovviamente, nella seguente relazione per gli elementi di T:

$$|T_{11}|^2 - |T_{12}|^2 = 1 = \det|T| \quad (1.26).$$

Utilizzando questa ultima relazione nelle espressioni delle ampiezze di riflessione e trasmissione dati da (1.16) si ricavano le relazioni:

$$r = -\frac{T_{12}^*}{T_{11}^*}, \quad t = \frac{1}{T_{11}^*} \quad (1.27)$$

cosicché la T può essere infine scritta come

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^*} & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

con la condizione $|r|^2 + |t|^2 = 1$ per la conservazione della corrente.

1.5 CORRENTE E CONDUTTANZA

La teoria descritta nei paragrafi precedenti permette di calcolare il coefficiente di trasmissione $T(E)$ in funzione dell'energia E di elettroni incidenti su una struttura a barriere di potenziale (eterostrutture, sistemi di multi quantum dots). Ovviamente è necessario determinare le relazioni che intercorrono tra $T(E)$ e le quantità fisicamente misurabili del sistema quale in particolare la sua caratteristica corrente-tensione $I(V)$. Questo è quello che ci si prefigge di sviluppare nei seguenti paragrafi.

Nella figura 1.5 viene mostrata una barriera di potenziale circondata da un insieme di elettroni (ad esempio due elettrodi metallici separati da uno strato di isolante). Una d.d.p. V è applicata tra le due regioni separate dalla stessa barriera: ciò determina un abbassamento pari a eV delle energie. La distribuzione degli elettroni può essere descritta da una funzione di Fermi ma una tale rappresentazione non terrà evidentemente conto della presenza di V . Si assumerà, dunque, che ciascuna delle due regioni possa essere descritta da un "quasi livello di Fermi", μ_L quella di sinistra e μ_R quella di destra (i livelli di Fermi "veri" esistono solo quando tutto il sistema è in equilibrio); evidentemente $\mu_L - \mu_R = eV$.

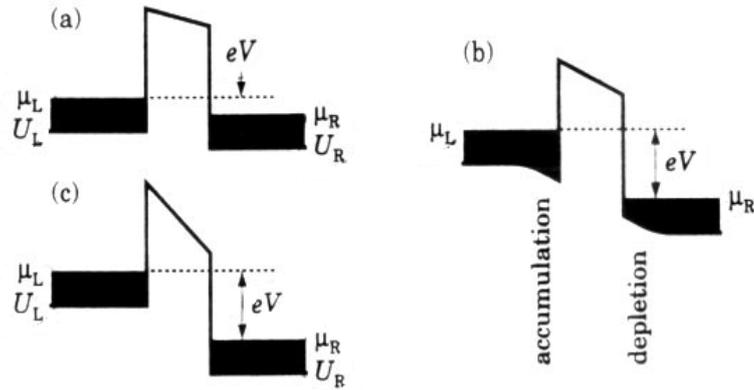


Fig.1.5 Una barriera circondata da elettroni, con una d.d.p. V applicata tra le due regioni separate dalla barriera. In (a) è mostrato un caso idealizzato per V piccola cosicché le bande immediatamente adiacenti la barriera non vengono praticamente modificate. In (b) è mostrato un caso più realistico per cui V ha l'effetto di curvare le bande immediatamente adiacenti alla barriera. Il caso (c) mostra una situazione per cui V è talmente grande da non permettere agli elettroni di destra di dare alcun contributo alla corrente.[8]

1.5.1 CORRENTE IN UNA DIMENSIONE

La corrente totale $I(V)$ attraverso la barriera descritta in figura precedente con applicata la d.d.p. V è data dalla differenza tra la corrente I_L , dovuta agli elettroni che attraversano la barriera dall'elettrodo di sinistra a quello di destra, e la corrente I_R , dovuta agli elettroni che attraversano la barriera dall'elettrodo di destra a quello di sinistra. Le espressioni di I_L e I_R sono del tutto simili eccetto che per i livelli di Fermi. Ragioniamo dunque su I_L , osservando che analoghe considerazioni valgono per I_R .

I_L può essere espressa da

$$I_L = 2e \int_0^{\infty} f[\varepsilon(k), \mu_L] v(k) T(k) \frac{dk}{2\pi} \quad (1.29)$$

osservando che:

(a) L'integrale è ristretto solo ai valori positivi di k perché si stanno considerando solo gli elettroni che incidono sulla barriera da sinistra.

Il fattore 2 posto innanzi all'integrale serve per tenere in conto dei due possibili stati di spin accessibili agli elettroni.

(b) La funzione di Fermi $f[\varepsilon(k), \mu_L]$ dà la probabilità che ogni stato dell'elettrodo di sinistra sia occupato da elettroni.

(c) Il fattore di velocità $v(k)$ trasforma la densità di carica in densità di corrente (come espresso dalla usuale relazione $J = nqv$).

(d) Il coefficiente di trasmissione $T(k)$ definisce la probabilità che un elettrone incidente sulla barriera con un determinato numero d'onda, la attraversi e contribuisca, così, a I_L .

(e) Il fattore $\frac{1}{2\pi}$ deriva dalla densità di stati elettronica in una dimensione.

L'integrale in (1.29) può essere espresso nella variabile energia osservando

semplicemente che $dk = \frac{dk}{dE} dE = \frac{1}{\hbar v} dE$. Sfruttando tale fatto si ha

immediatamente

$$I_L = 2e \int_{U_L}^{\infty} f(E, \mu_L) v T(E) \frac{dE}{2\pi\hbar v} = \frac{2e}{h} \int_{U_L}^{\infty} f(E, \mu_L) T(E) dE \quad (1.30)$$

avendo inoltre considerato come estremo inferiore di integrazione il minimo U_L della banda. Si osservi che in questa espressione finale la velocità dell'elettrone è svanita. Analogamente l'espressione di I_R può essere data in termini di

$$I_R = -\frac{2e}{h} \int_{U_R}^{\infty} f(E, \mu_R) T(E) dE \quad (1.31)$$

dove si è posto un segno meno per indicare che si stanno ora considerando elettroni che attraversano la barriera in verso opposto a quelli presi in considerazione dalla (1.30), ed essendo U_R il minimo della energia accessibile agli elettroni nell'elettrodo di destra.

É chiaro come gli elettroni che hanno energia nel range compreso tra U_R e U_L non possano contribuire alla corrente totale poiché non ci sono stati accessibili agli elettroni con tali energie nell'elettrodo di sinistra. In conseguenza a ciò, l'estremo inferiore dei due integrali precedenti deve essere considerato come U_L .

Infine, dunque, la corrente totale attraverso la struttura è espressa da

$$I = I_L + I_R = \frac{2e}{h} \int_{U_L}^{\infty} [f(E, \mu_L) - f(E, \mu_R)] T(E) dE \quad (1.32).$$

Si può osservare che la corrente così ottenuta non è proporzionale alla d.d.p. applicata (è, anzi, una funzione spesso assai complicata di essa) e la legge di Ohm perde, quindi, di validità. Si possono, però, considerare dei casi particolari di notevole importanza:

1) A basse temperature ($T \rightarrow 0$) la funzione di Fermi può essere approssimata ad una funzione a scalino e considerato che in tal caso solo gli elettroni con energie comprese tra μ_R e μ_L contribuiscono alla corrente, si ottiene:

$$I = \frac{2e}{h} \int_{\mu_R}^{\mu_L} T(E) dE \quad (1.33).$$

2) Se la d.d.p. V applicata è molto piccola allora la differenza tra le funzioni di Fermi può essere espansa all'ordine più basso in serie di Taylor. Prendendo $\mu_L = \mu + \frac{1}{2}eV$ e $\mu_R = \mu - \frac{1}{2}eV$ dove μ è il livello di Fermi all'equilibrio e procedendo a tale espansione

$$f(E, \mu_L) - f(E, \mu_R) \approx eV \frac{\partial f(E, \mu)}{\partial \mu} = -eV \frac{\partial f(E, \mu)}{\partial E} \quad (1.34)$$

che sostituita in (1.32) dà

$$I = \frac{2e^2V}{h} \int_{U_L}^{\infty} \left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right) T(E) dE \quad (1.35)$$

e prendendo come conduttanza la quantità

$$G = \frac{2e^2}{h} \int_{U_L}^{\infty} \left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right) T(E) dE \quad (1.36)$$

si ottiene la legge di Ohm $I = GV$ per il sistema.

Nella (1.36) l'integrale è adimensionato ed è il fattore e^2/h a dare a G le dimensioni di una conduttanza: alla quantità $G_Q = e^2/h$ si dà il nome di quanto di conduttanza a cui corrisponde il quanto di resistenza $R_Q = h/e^2 = 25.8k\Omega$.

3) Riconsiderando il caso 2 e supponendo che la temperatura sia talmente bassa da rendere valida la relazione $-\frac{\partial f}{\partial E} = \delta(E - \mu)$, allora l'integrale collassa e si ottiene per la conduttanza del sistema

$$G = \frac{2e^2}{h} T(\mu) \quad (1.37)$$

che dipende solo dal coefficiente di trasmissione del sistema stesso.

1.5.2 CORRENTE IN DUE E TRE DIMENSIONI

Si consideri una struttura a barriere di potenziale tridimensionale; i risultati che si otterranno relativamente al trasporto elettronico attraverso una tale struttura sono facilmente adattabili anche ad una struttura bidimensionale.

Si assuma che il potenziale $V(\vec{R})$ sia una funzione solo di z in modo tale che il sistema sia traslazionalmente invariante nel piano x - y . La funzione d'onda di un elettrone in tale struttura può essere fattorizzata e l'energia scritta come una somma, come di seguito riportato:

$$\psi_{\vec{k}, k_z}(\vec{r}, z) = \exp(i\vec{k}\vec{r})u_{k_z}(z) \quad (1.38)$$

$$\varepsilon(\vec{K}) = U_L + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (1.39)$$

avendo indicato: $\vec{K} = (\vec{k}, k_z)$ con $\vec{k} = (k_x, k_y)$, $\vec{r} = (x, y)$, U_L l'energia potenziale dell'elettrodo di sinistra.

Dato che il sistema in esame è traslazionalmente invariante sul piano x - y allora, evidentemente, il coefficiente di trasmissione dell'intera struttura dipenderà esclusivamente da k_z .

In modo del tutto analogo al caso unidimensionale, la densità di corrente J_L attraverso la struttura tridimensionale, dovuta al passaggio di elettroni da sinistra verso destra è esprimibile da

$$\begin{aligned} J_L &= 2e \int \frac{d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dk_z}{2\pi} f[\varepsilon(\vec{K}), \mu_L] v_z(\vec{K}) T(k_z) = \\ &= e \int_0^\infty \frac{dk_z}{2\pi} \frac{\hbar k_z}{m} T(k_z) \left[2 \int \frac{d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2} f\left(U_L + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m}, \mu_L\right) \right] \end{aligned} \quad (1.40).$$

Si può osservare che tutta l'espressione racchiusa in parentesi quadrata nella relazione immediatamente precedente non è altro che la densità di stati di un gas di elettroni bidimensionale nel piano x - y : $n_{2D}(\mu_L - E)$, avendo posto

$$E = U_L + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}.$$

In tal modo si può facilmente arrivare alla

$$J_L = \frac{e}{h} \int_{U_L}^{\infty} n_{2D}(\mu_L - E) T(E) dE \quad (1.41)$$

ed analogamente alla

$$J_R = -\frac{e}{h} \int_{U_R}^{\infty} n_{2D}(\mu_R - E) T(E) dE \quad (1.42)$$

così da ottenere la densità di corrente totale come:

$$J = \frac{e}{h} \int_{U_L}^{\infty} [n_{2D}(\mu_L - E) - n_{2D}(\mu_R - E)] T(E) dE \quad (1.43).$$

Un caso particolarmente interessante si ottiene quando la d.d.p. applicata sia opportunamente piccola e si considerino temperature molto basse. In tali ipotesi si può mostrare che la (1.43) implica una conduttanza del sistema per unità di area espressa da

$$\bar{G} = \frac{J}{V} = \frac{e^2}{h} \frac{m}{\pi \hbar^2} \int_U^{\mu} T(E) dE \quad (1.44).$$

Le formule esposte in questo paragrafo possono essere adattate al caso di una struttura bidimensionale sostanzialmente sostituendo n_{2D} con n_{1D} (densità di stati di un gas di elettroni unidimensionale).

1.6 TUNNELLING RISONANTE

In una buca di potenziale che si realizza tra due barriere di potenziale si formano degli stati elettronici *risonanti* (o stati *quasi stazionari*). Un esempio semplice ed intuitivo viene mostrato in figura 1.6.

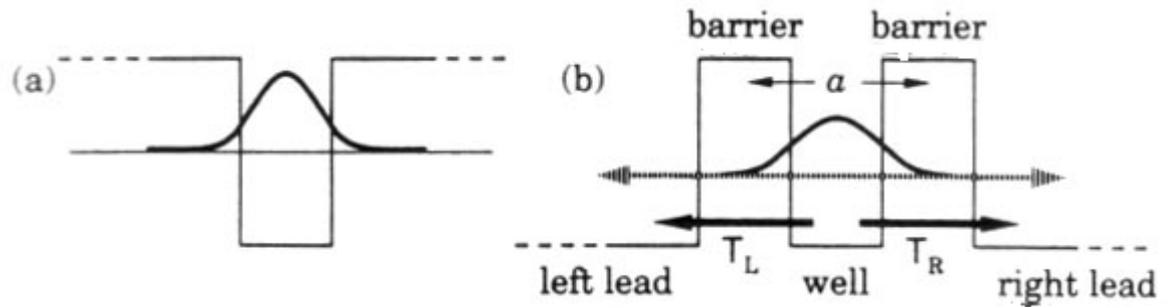


Fig.1.6 (a) Buca di potenziale finita con uno stato stazionario “vero”. (b) La stessa buca di figura (a) è realizzata tra due barriere di potenziale per cui lo stato stazionario diventa *risonante* o *quasi stazionario*. [8]

Il potenziale mostrato in figura 1.6.b è identico a quello di figura 1.6.a eccetto per il fatto che le barriere che confinano l’elettrone nella buca hanno estensione finita. Di conseguenza in tale struttura non vi sono più veri stati stazionari nel senso che un elettrone nella buca può operare tunnelling attraverso una delle barriere e scappare da essa. Ovviamente, l’elettrone potrà rimanere nella buca per un tempo molto lungo se le barriere sono sufficientemente spesse, ed un “ricordo” dello stato stazionario ivi persiste come uno *stato quasi stazionario* o *risonante*. L’energia di un tale stato non sarà definita con precisione ma sarà compresa in un range $\frac{\hbar}{\tau}$, essendo τ il tempo di vita media dell’elettrone entro la buca.

Questi stati risonanti hanno delle notevoli influenze sul coefficiente di trasmissione dell’intera struttura. In generale il coefficiente di trasmissione T delle due barriere si può approssimare con il prodotto dei coefficienti di trasmissione delle due barriere. Vicino la situazione di risonanza (cioè quando l’elettrone incidente sulla struttura ha una energia vicina a quella dello stato risonante) T aumenta molto rispetto a tale prodotto e raggiunge un valore massimo per cui la struttura appare all’elettrone praticamente trasparente: questo è il fenomeno di *tunnelling risonante*.

1.6.1 COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE IN UNA DIMENSIONE

L'approccio matriciale sviluppato nei primi paragrafi riesce a dare una semplice interpretazione dell'effetto tunnel risonante, almeno per sistemi unidimensionali. Si consideri, dunque, un sistema unidimensionale a doppia barriera del tipo rappresentato in figura 1.6.b.

Siano t_R e r_R le ampiezze di trasmissione e di riflessione relativi alla barriera di destra (barriera R) e t_L e r_L quelle relative alla barriera di sinistra (barriera L). Allora le matrici di trasmissione relative alle due barriere sono rispettivamente

$$T_R = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_R} & -\frac{r_R^*}{t_R} \\ -\frac{r_R}{t_R} & \frac{1}{t_R} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

$$T_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_L} & -\frac{r_L^*}{t_L} \\ -\frac{r_L}{t_L} & \frac{1}{t_L} \end{pmatrix} \quad (1.46).$$

Sfruttando (1.13) ed (1.17) si ricava la matrice di trasmissione della struttura totale

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1 - r_L^* r_R^* e^{-2ika}}{t_L^* t_R^*} & \frac{r_L e^{ika} - r_R^* e^{-ika}}{t_L t_R^*} \\ \frac{r_L^* e^{-ika} - r_R e^{ika}}{t_L^* t_R} & \frac{1 - r_L r_R e^{2ika}}{t_L t_R} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

da cui segue immediatamente l'ampiezza di trasmissione dell'intera struttura

$$t = \frac{t_L t_R}{1 - r_L r_R \exp(2ika)} \quad (1.48)$$

cosicché il coefficiente di trasmissione della struttura totale è

$$T = |t|^2 = \frac{T_L T_R}{(1 - \sqrt{R_L R_R})^2 + 4\sqrt{R_L R_R} \sin^2 \frac{1}{2}\phi} \quad (1.49)$$

essendo T_R e T_L i coefficienti di trasmissione delle due barriere, R_L e R_R i loro coefficienti di riflessione e $\phi = 2ka + \rho_L + \rho_R$ un fattore di fase (avendo posto $r_L = |r_L| \exp(i\rho_L)$, $r_R = |r_R| \exp(i\rho_R)$).

La (1.49) assume un massimo, e quindi esprime il coefficiente della struttura in condizione di risonanza, quando $\phi = 2n\pi$ (n naturale). In tale situazione

$$T = T_{pk} = \frac{T_L T_R}{(1 - \sqrt{R_L R_R})^2} \approx \frac{4T_L T_R}{(T_L + T_R)^2} \quad (1.50)$$

la seconda forma seguendo dall'assunzione che i singoli coefficienti di trasmissione delle due barriere siano piccoli e sviluppando $\sqrt{R_L}$ e $\sqrt{R_R}$ con il teorema binomiale⁽¹⁾.

Infine se si suppone che le due barriere siano identiche e, dunque, che abbiano lo stesso coefficiente di trasmissione e che questo sia opportunamente piccolo, il coefficiente di trasmissione totale della struttura in funzione dell'energia dell'elettrone incidente assume la seguente notevole forma lorentziana

$$T(E) = T_{pk} \left[1 + \left(\frac{E - E_{pk}}{\frac{1}{2}\Gamma} \right)^2 \right]^{-1} \quad (1.51)$$

dove la risonanza è centrata all'energia E_{pk} , e Γ rappresenta l'altezza a mezza altezza della stessa forma lorentziana.

Un esempio del coefficiente di trasmissione per una struttura a doppia barriera è riportato in figura 1.7. In particolare, in tale esempio, le barriere sono delle barriere di potenziale a funzione δ per pura semplicità.

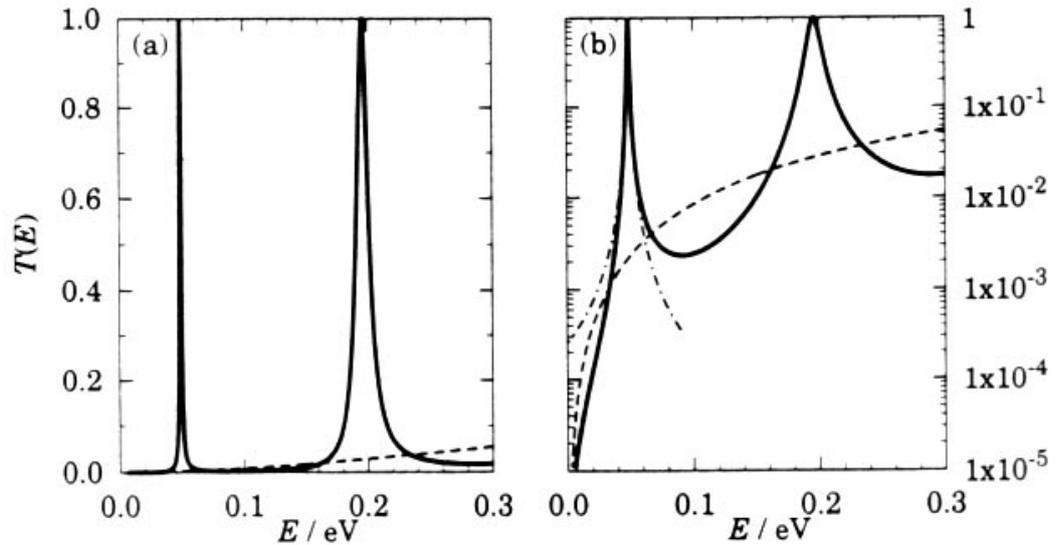


Fig.1.7 Coefficiente di trasmissione per una struttura a tunnelling risonante: (a) su scala lineare, (b) su scala logaritmica. Le due barriere sono identiche e sono delle “ δ -functions” di altezza 0.3eV e estensione 5nm.

Le curve continue indicano il coefficiente di trasmissione dell'intera struttura mentre quelle tratteggiate di una sola delle due barriere.[8]

Per sistemi bidimensionali e tridimensionali la formalistica coinvolta diviene più complicata ma la spiegazione qualitativa del tunnelling risonante per tali strutture è del tutto simile a quella presentata per un sistema unidimensionale.

1.7 TRASPORTO COERENTE IN SISTEMI A MOLTI CANALI

In questa ultima sezione del capitolo si vuole estendere la teoria della conduzione precedentemente esposta per descrivere un centro di scattering tra due o più sistemi unidimensionali o “leads”. Il fondamentale concetto fisico che nasce nella descrizione della conduzione elettronica in sistemi di questo tipo è la *quantizzazione della conduttanza*.

Si osservi nuovamente che la teoria che verrà sviluppata rimane ancora ristretta al *trasporto coerente* (nel senso che gli elettroni coinvolti nei processi di conduzione mantengono costante ciascuno, durante tutti i suddetti processi, la propria fase): ciò comporta, in pratica, che il sistema in esame debba essere talmente piccolo da poter trascurare scattering inelastici degli elettroni. Inoltre per semplicità di trattazione ci si limiterà al caso di basse temperature.

1.7.1 DUE “LEADS” A MOLTI CANALI: LA QUANTIZZAZIONE DELLA CONDUTTANZA

La prima importante estensione del modello di un sistema a barriere di potenziale unidimensionale viene mostrato in figura 1.8.

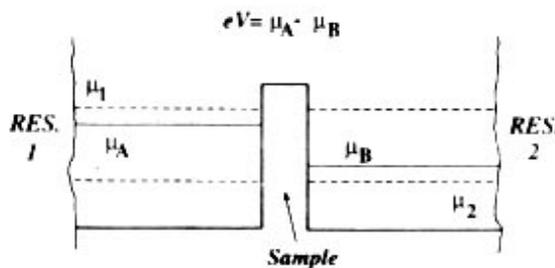
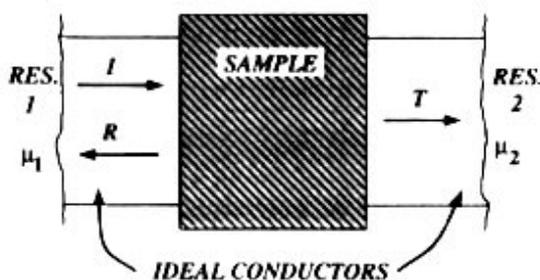
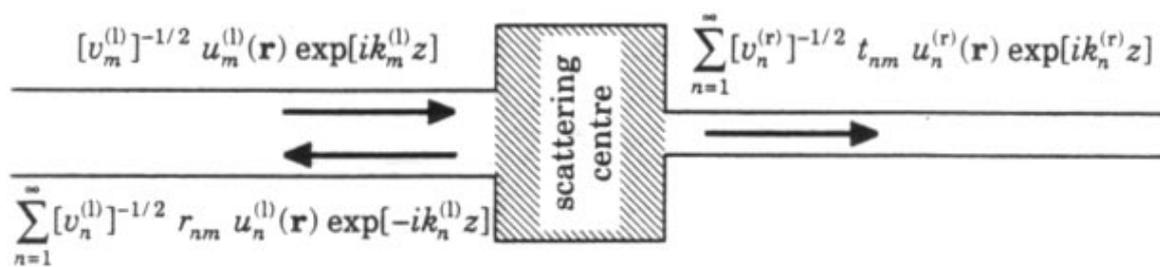


Fig.1.8 Trasporto coerente attraverso un sistema con due leads, in ognuno dei quali possono propagarsi molti stati elettronici. Sono date diverse rappresentazioni equivalenti della situazione in esame.[8,9]

Nella figura precedente è mostrato un sistema a due leads con un centro di scattering tra di essi e tale che ciascun lead può contenere molte sottobande elettroniche (un sistema unidimensionale del tipo trattato nei paragrafi precedenti si può anche così schematizzare considerando, però, che ciascun lead possa contenere una sola sottobanda elettronica). A queste sottobande ci si riferisce spesso come a dei *modi* o *canali*. É importante che il potenziale trasverso in ogni lead rimanga costante lungo la sua lunghezza sebbene la sua particolare forma sia del tutto generica.

La funzione d'onda di un elettrone entro un lead può essere scritta nella forma

$$\psi(\vec{R}) = \sum_n v_n^{-\frac{1}{2}} [A_n \exp(ik_n z) + B_n \exp(-ik_n z)] u_n(\vec{r}) \quad (1.52)$$

e non è altro che una generalizzazione della (1.1) (con la solita notazione $\vec{R} = (\vec{r}, z)$, $\vec{r} = (x, y)$). Gli stati trasversi sono stati contrassegnati dall'indice n e quindi pure le funzioni d'onda $u_n(\vec{r})$ così come lo saranno le energie ε_n .

L'energia totale di un elettrone in un tale sistema può essere scritta come

$$E = \varepsilon_n + \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}: \text{ gli stati si propagano se } E > \varepsilon_n \text{ mentre decadono negli altri}$$

casi. I due leads sono in genere differenti cosicché le energie corrispondenti alle sottobande sono anch'esse diverse e dunque il numero di stati che si può propagare in ciascun lead è diverso, diciamo N_{left} e N_{right} .

Si supponga di “iniettare” un'onda puramente di modo m nel lead di sinistra. Il centro di scattering mischia i diversi modi in modo tale che alla generazione dell'onda scatterata avranno contribuito tutti i modi uscenti da entrambi i leads. Avendo osservato ciò si può affermare che le funzioni d'onda elettroniche nei due leads assumono la forma completa

$$\psi_{\text{left}}(\vec{R}) = [v_m^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} u_m^{(1)}(\vec{r}) \exp(ik_m^{(1)} z) + \sum_{n=1}^{\infty} [v_n^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} r_{nm} u_n^{(1)}(\vec{r}) \exp(-ik_n^{(1)} z) \quad (1.53).$$

$$\psi_{\text{right}}(\vec{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} [v_n^{(r)}]^{-\frac{1}{2}} t_{nm} u_n^{(r)}(\vec{r}) \exp(ik_n^{(r)} z)$$

La matrice di trasmissione T definita nel paragrafo 1.3 può essere estesa al caso di molti modi che si propagano contemporaneamente. Essa può essere semplicemente costruita utilizzando i coefficienti t_{nm} presenti in (1.53), che danno l'ampiezza di trasmissione per un elettrone incidente dal lead di sinistra con modo m e che viene trasmesso al lead di destra con modo n . Tale

matrice sarà $N_{\text{right}} \times N_{\text{left}}$ e descriverà completamente la conduzione elettronica attraverso il sistema.

A basse temperature, un ragionamento analogo a quello fatto nel paragrafo 1.5.1 e che porta al risultato $G = (2e^2/h)T$, permette di determinare la seguente espressione per la conduttanza totale del sistema in esame

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_m \sum_n |t_{nm}|^2 \quad (1.54).$$

Tale relazione può essere riscritta in modo più compatto utilizzando una matrice Hermitiana coniugata t definita da $(t^\dagger)_{mn} = (t_{nm})^*$:

$$\begin{aligned} G &= \frac{2e^2}{h} \sum_{m,n} t_{nm} t_{nm}^* = \frac{2e^2}{h} \sum_{m,n} (t)_{nm} (t^\dagger)_{mn} = \\ &= \frac{2e^2}{h} \sum_n (tt^\dagger)_{nn} = \frac{2e^2}{h} \text{Tr}(tt^\dagger) = \frac{2e^2}{h} \text{Tr}(t^\dagger t) \end{aligned} \quad (1.55)$$

avendo indicato con Tr la traccia della matrice.

Questo risultato può essere utilizzato per il calcolo della conduttanza di un tipico sistema detto *quantum point contact* e rappresentato in figura 1.9.a. Esso è realizzato tramite due gates opposti modellati sulla superficie di una eterostruttura; ad essi è applicata una d.d.p. negativa per realizzare tra essi stessi un gas di elettroni bidimensionale. Gli elettroni di questo sistema sono costretti a viaggiare nel gap tra i due gates che si comporta come un sistema quasi unidimensionale. Le due regioni adiacenti il gas di elettroni bidimensionale fungono da leads.

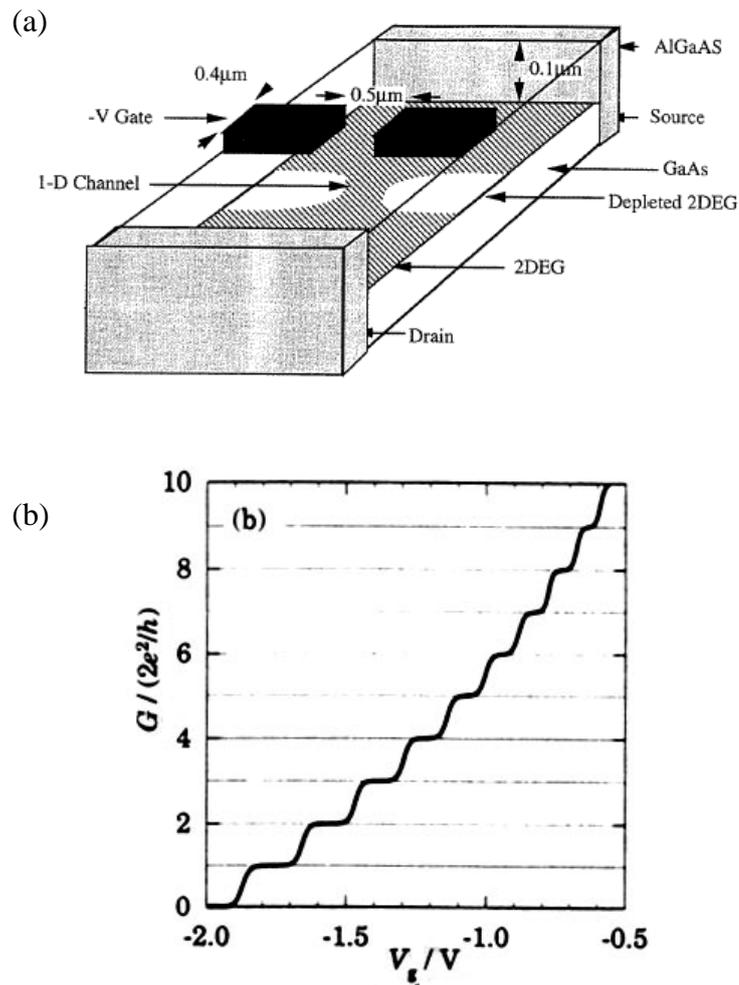


Fig.1.9 (a) Schematizzazione di un tipico quantum point contact: una piccola regione definita tra due gates metallici realizzati sulla superficie di una eterostruttura contenente un sistema di elettroni bidimensionale[11]. (b) Rappresentazione della conduttanza del sistema in funzione del potenziale di gate V_g (V , tenuto costante, è il potenziale applicato nella regione compresa tra i due gates)[8].

Partendo dalla (1.55) si può mostrare che la conduttanza di questo sistema è esprimibile da

$$G = \frac{2e^2}{h} \text{Tr}(t^\dagger t) \approx \frac{2e^2}{h} N_t \quad (1.56)$$

essendo N_t il numero di modi che si propagano attraverso la regione compresa tra i due gates. In figura 1.9.b viene mostrato un plot della conduttanza del sistema in funzione del potenziale di gate V_g realizzato

attraverso una simulazione: i dati sperimentali sono in perfetto accordo con esso. La (1.56) e la figura 1.9.b mostrano quella caratteristica dei sistemi nanoscopici che viene detta **quantizzazione della conduttanza**: essa viene esibita da tutte quelle strutture in cui si manifestino gli effetti di confinamento quantistico degli elettroni (in cui, cioè gli elettroni hanno lunghezza d'onda di deBroglie paragonabile alle dimensioni del dispositivo attraverso cui essi vengono trasportati).

Come viene accennato nel paragrafo seguente il risultato della quantizzazione della conduttanza può essere esteso a sistemi con molti leads.

1.7.2 SISTEMI A MOLTI LEADS: LA FORMULA DI LANDAUER

In figura 1.10 è mostrata, con alcune specifiche applicazioni, la schematizzazione generale di un sistema a molti leads. Tipicamente alcuni leads sono utilizzati per iniettare le correnti, altri per misurare i voltaggi e verranno detti rispettivamente *current probes* e *voltage probes*. Si assume che i voltage probes siano connessi a voltmetri ideali (che non conducano corrente). Il caso (c), particolarmente importante, mostra una tipica misura di resistenza a *quattro punte*, spesso preferibile in quanto insensibile alla resistenza di contatto. Alternativamente la resistenza può essere misurata tra due contatti ottenendo una configurazione a *due punte*.

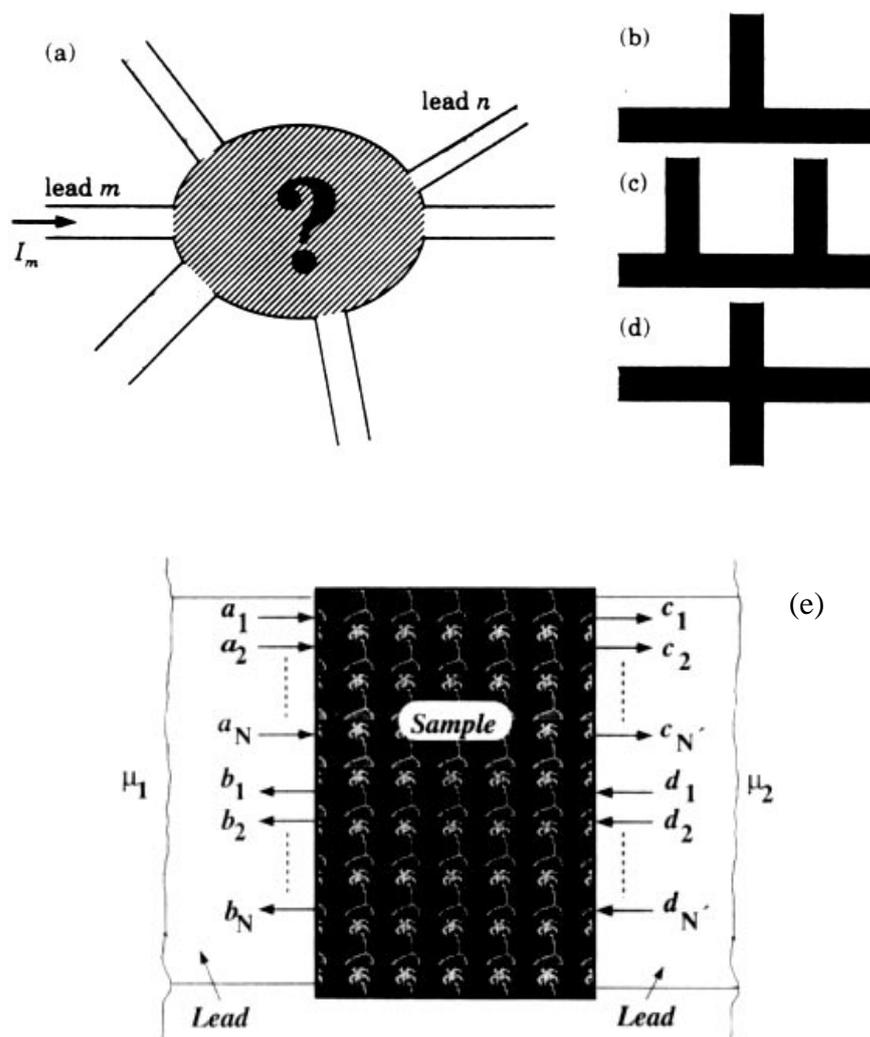


Fig.1.10 Geometria di un campione a molti leads. (a) mostra il caso generico, (b) una giunzione a T, (c) una misura a quattro punte di resistenza longitudinale, (d) una microscopica barra di Hall. La (e) è una rappresentazione equivalente della (a).[8,9]

Riferendoci al caso generico di figura 1.10.a, si contrassegneranno i leads con m ed n ed i modi che si propagano in ogni lead con α e β . N_m modi si considereranno propagarsi nel lead m ; ogni lead si supponerà avere sezione costante (come sempre supposto finora) ed una corrente entrante nel lead sarà presa positiva.

Si consideri un particolare lead m ed un particolare modo α che si propaga in esso, la combinazione dei quali sarà indicata da (m, α) . Seguendo l'impostazione data nel paragrafo 1.5.1, la corrente trasportata dal modo α attraverso il lead m può essere espressa da

$$I_{m\alpha}^{inc} = -\frac{2e}{h} \delta\mu_m = \frac{2e^2}{h} V_m \quad (1.57)$$

essendo $\delta\mu_m = -eV_m$ la variazione nell'energia di Fermi relativa al lead m e V_m la d.d.p. ad esso applicata. Questa corrente è la stessa per tutti gli N_m modi che si propagano in questo lead. Di tutti gli elettroni incidenti con configurazione (m, α) , una parte entreranno nel modo β del lead n con ampiezza di trasmissione $t_{n\beta, m\alpha}$. Questi elettroni contribuiscono ad una corrente $-I_{m\alpha}^{inc} |t_{n\beta, m\alpha}|^2$, che è negativa in quanto uscente dal lead. Altri elettroni ancora possono essere riflessi e ritornare indietro nel lead m , non necessariamente nello stesso modo, con una ampiezza di riflessione $r_{m\beta, m\alpha}$. La corrente totale nel lead n dovuta agli elettroni iniettati dal lead m è data dalla somma su tutti i modi presenti in entrambi i leads (allo stesso modo di quanto è espresso nella equazione (1.54))

$$I_{nm} = -\frac{2e^2}{h} V_m \sum_{\beta=1}^{N_n} \sum_{\alpha=1}^{N_m} |t_{n\beta, m\alpha}|^2 \quad (1.58).$$

Per una maggiore chiarezza possono essere definiti i coefficienti di trasmissione e riflessione nel modo seguente:

$$T_{nm} = \sum_{\beta=1}^{N_n} \sum_{\alpha=1}^{N_m} |t_{n\beta, m\alpha}|^2, \quad R_m = \sum_{\beta=1}^{N_m} \sum_{\alpha=1}^{N_m} |r_{m\beta, m\alpha}|^2 \quad (1.59).$$

Questi coefficienti possono essere, ciascuno, più grandi dell'unità, diversamente dai semplici coefficienti del caso unidimensionale.

La corrente totale iniettata nel lead m è data dalla corrente incidente meno la corrente riflessa. La corrente totale incidente, sommata su tutti i modi che si propagano, è $\frac{2e^2}{h} N_m V_m$ cosicché la corrente netta nel lead m è

$$I_{mm} = \frac{2e^2}{h} (N_m - R_m) V_m \quad (1.60).$$

Ovviamente, la conservazione della corrente richiede che questa ultima debba essere eguale alla corrente totale iniettata dal lead m , attraverso il sistema, in tutti gli altri leads connessi al sistema stesso. Tale corrente è $I_m = \sum_{n, n \neq m} I_{nm}$. Questa condizione di conservazione della corrente porta alla relazione:

$$R_m + \sum_{n, n \neq m} T_{nm} = N_m \quad (1.61)$$

che è la ovvia generalizzazione di $T + R = 1$.

Per ottenere la corrente totale attraverso il lead m basta sommare la (1.60) su tutti i leads che contribuiscono a questa corrente, considerando che il generico lead n determina una corrente $-\frac{2e^2}{h} T_{nm} V_n$ attraverso lo stesso lead m . Si ottiene così:

$$I_m = \frac{2e^2}{h} \left[(N_m - R_m) V_m - \sum_{n, n \neq m} T_{nm} V_n \right] \quad (1.62).$$

Questa è la famosa formula di **Landauer** (o Landauer-Büttiker) per la conduttanza di un sistema a molti leads. Essa permetta di determinare la corrente attraverso uno dei leads quando sia conosciuta la struttura completa del sistema e siano conosciute le d.d.p. applicate al sistema.

La (1.62) può essere scritta nel seguente modo più compatto

$$I_m = \sum_n G_{mn} V_n \quad (1.63)$$

avendo definito la seguente matrice di conduttanza

$$G_{mn} = \frac{2e^2}{h} \left[(N_m - R_m) \delta_{mn} - T_{mn} \right] \quad (1.64).$$

1.8 CONCLUSIONI

La teoria del tunnelling transport sviluppata, nelle sue idee fondamentali, in questo capitolo è alla base dello studio di tutti quei sistemi in cui il trasporto avviene tramite fenomeni di tunnelling dei portatori. Si tenga ben presente, però, che essa è rigorosamente esatta solo per sistemi perfettamente “puliti” ed “ordinati” affinché sia soddisfatta la richiesta che i portatori mantengano invariata la propria fase durante tutti gli stessi processi di tunnelling. Naturalmente, una tale richiesta è del tutto irrealistica: allo scopo di eliminare, almeno in parte questa ipotesi, ed ottenere, quindi, una descrizione più realistica dei sistemi in esame, in particolare sistemi di nanocristalli metallici, verrà sviluppato il capitolo III.

Nonostante questa limitazione la teoria qui sviluppata è istruttiva per la comprensione dei fenomeni di base, relativamente alla conduzione elettronica, in sistemi oggi di fondamentale studio e di fondamentali applicazioni tecnologiche: i sistemi di molti quantum dots (allo studio particolareggiato dei quali sono dedicati gli ultimi due capitoli).

Uno dei più importanti e significativi risultati della teoria del tunnelling transport e della fisica moderna in generale è quello relativo alla quantizzazione della conduttanza in sistemi nanoscopici.

La sua importanza è ribadita dal continuo riferimento che si fa ad esso durante tutta l’analisi svolta in questo lavoro.

Per uno studio più approfondito della teoria del tunnelling transport (relativamente, ad esempio, all’effetto di campi magnetici) ed alle controverse discussioni relative ad alcuni aspetti della quantizzazione della conduttanza si rimanda ai riferimenti bibliografici.

CAPITOLO II

EFFETTI DI ELETTRONE SINGOLO IN QUANTUM DOTS

2.1 INTRODUZIONE

L'elettronica digitale, sin dall'invenzione del transistor (1947) con le sue conseguenti applicazioni nei circuiti integrati, si è mossa sempre più nella direzione della miniaturizzazione dei dispositivi a stato solido. Tale miniaturizzazione comporta, divenendo le dimensioni dei suddetti dispositivi paragonabile alla lunghezza d'onda degli elettroni coinvolti nei processi digitali, la necessità di un approccio quanto-meccanico allo studio di questi sistemi. Questa esigenza ha, quindi, portato ad uno studio approfondito di tutti quegli effetti, prettamente quantistici, che si manifestano nei sistemi di dimensioni nanoscopiche a causa del confinamento degli elettroni in essi presenti. Sistemi di questo tipo possono avere strutture differenti ma mostrare tutti simili proprietà di trasporto che possono essere spiegate con gli stessi principi fisici di base.

Il prototipo fondamentale di dispositivo nanoscopico prodotto artificialmente è il **quantum dot**. Tipicamente, un quantum dot è una piccola regione in un materiale semiconduttore o metallico con dimensioni dell'ordine di 10 nm. Recenti esperimenti di trasporto di elettroni hanno mostrato che gli stessi principi fisici valgono per sistemi molecolari ed ultrapiccoli grani metallici.

Un quantum dot può essere costituito da circa un milione di atomi con un equivalente numero di elettroni; virtualmente tutti gli elettroni sono strettamente legati ai nuclei del materiale ma solo un numero di elettroni liberi molto piccolo, tra uno e poche centinaia, può trovarsi nel dot. La lunghezza d'onda di deBroglie di questi elettroni è comparabile con le dimensioni del dot per cui essi occupano livelli di energia quantizzati ed hanno uno spettro di eccitazione discreto. Un'altra caratteristica di un quantum dot è quella che di solito viene detta "charging energy": essa è l'energia richiesta per aggiungere o rimuovere un elettrone dal dot.

La fisica dei dots viene studiata tramite la misura delle loro proprietà di trasporto, cioè della loro capacità di trasportare una corrente elettrica. Dunque i quantum dots si possono pensare come *atomi artificiali* che hanno la possibilità di essere connessi a contatti elettrici per indagarne gli *stati atomici*. I quantum dots, data questa loro natura nanoscopica sono, quindi, i sistemi adatti per l'analisi dei cosiddetti **effetti di elettrone singolo** cioè degli effetti che si manifestano nel trasporto di un singolo elettrone attraverso il dispositivo in esame.

Scopo di questo capitolo è quello di illustrare gli effetti tipici riscontrabili sperimentalmente in un dot ed i principi fisici di base che regolano il trasporto di elettroni attraverso esso.

2.2 TECNICHE DI FABBRICAZIONE E DI MISURA

Gli effetti di quantizzazione di singolo elettrone sono noti sin dal 1911, quando Millikan con i suoi famosi esperimenti mostrò la quantizzazione della carica elettrica in unità di e . Il tunnelling di elettrone singolo fu per la prima volta studiato nei solidi nel 1951 da Gorter[74] e più tardi nel 1968 da

Giaever e Zeller[75], nel 1969 da Lambe e Jaklevic[53]. Questi esperimenti pionieristici investigavano il trasporto attraverso sottili films di piccoli grani. Una dettagliata teoria di trasporto basata su questi esperimenti fu sviluppata nel 1975 da Kulik e Shekter[54]. Tuttavia, questi esperimenti avevano il notevole difetto di considerare gli effetti medi su un grande numero di grani e la possibilità di controllare un numero molto limitato di parametri del sistema. Solo negli anni ottanta, il rapido progresso nel controllo dei dispositivi permise la fabbricazione di ultra piccoli sistemi tramite l'uso della *nanolitografia* e di processi di *self assembling*. Queste nuove tecnologie unite alle predizioni teoriche di Likharev, Mullen, Averin *et al.* permise la scoperta di tutta una serie di nuovi fenomeni di trasporto. La prima chiara dimostrazione sperimentale del tunnelling controllato di elettrone singolo fu messa a punto da Fulton e Dolan nel 1987. Il sistema da essi realizzato era del seguente tipo:

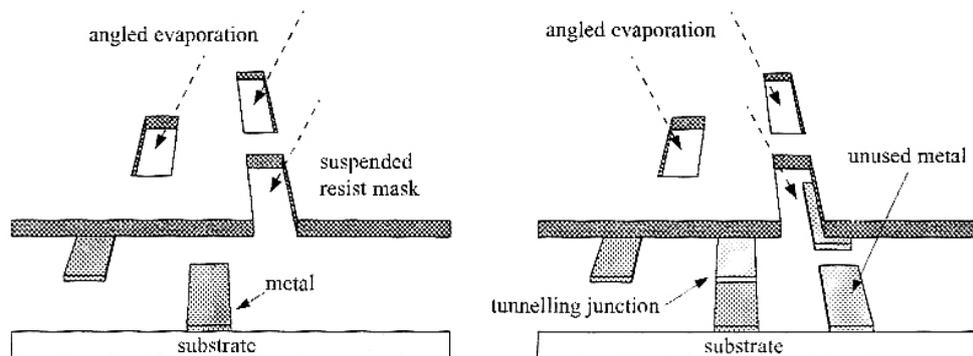


Fig.2.1 Successione dei processi coinvolti nella creazione di giunzioni tunnel metallo-ossido-metallo. Questa tecnica fu sviluppata da Fulton e Dolan utilizzando la fotolitografia; la "suspended resist mask" è formata da uno strato di germanio depositato su un resist polimerico e poi modellato. Ossidazioni tra successive deposizioni metalliche formano gli strati di "isolante tunnel". Giunzioni di questo tipo hanno dimensioni di circa 30 nm.[23]

Il sistema descritto nella fig.2.1 può essere schematizzato nella sua struttura di base come segue:

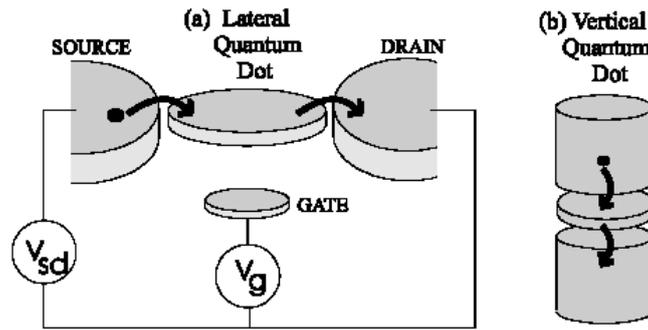


Fig.2.2 Schematizzazione di un quantum dot nella forma di un disco connesso a *source* e *drain* tramite giunzioni tunnel e ad un *gate* tramite un condensatore; (a) mostra la geometria laterale e (b) quella verticale [17].

Nel loro esperimento, Fulton e Dolan, osservarono[23] che la corrente macroscopica attraverso le due giunzioni è estremamente sensibile alle variazioni di carica del gate condensatore: queste variazioni sono le cosiddette **Coulomb oscillations**. Questo lavoro mostrò, inoltre, l'utilità di un tale sistema come un *single-electrometer*, un elettrometro, cioè, capace di misurare singole cariche. La tecnica originariamente sviluppata da Fulton e Dolan permette, oggi, di fabbricare giunzioni metallo-isolante-metallo che sono sufficientemente piccole da esibire netti effetti di elettrone singolo nonché integrabili in sistemi di multigiunzioni. Lo svantaggio fondamentale di questa tecnica risiede essenzialmente nella sua complessità.

L'avvento dello *Scanning Tunnelling Microscopy (STM)* rinnovò l'interesse per il fenomeno del **Coulomb blockade** nei grani ultrapiccoli. Un STM può dare immagini della topografia di una superficie e misurare caratteristiche locali corrente-tensione su una scala di dimensioni atomiche. Un grano di dimensioni di circa 10 nm può possedere una *charging energy* dell'ordine di 100 meV, cosicché in un tale sistema i fenomeni di singolo elettrone possono aver luogo anche a temperatura ambiente. Tali *charging energies* sono 10-100 volte più grandi di quelle ottenute in sistemi prodotti artificialmente. Tuttavia è molto difficoltoso fabbricare queste strutture che si formano autonomamente in geometrie prestabilite.

Effetti di confinamento quantistico su proprietà elettroniche di eterostrutture a semiconduttore erano ben conosciute prima dello studio dei quantum dots. Tecniche di crescita, quali l'epitassia da fasci molecolari, permettono la

fabbricazione di *buche quantiche* ed *eterogiunzioni* con livelli di energia quantizzati lungo la direzione di crescita (z). In tal modo gli elettroni vengono confinati lungo la direzione z mentre il loro moto è libero nel piano x - y : si genera, così, un gas di elettroni bidimensionale (2DEG); è possibile realizzare dei dots combinando questa tecnica di crescita con la litografia a fascio elettronico che produce un confinamento in tutte e tre le direzioni. Alcuni dei primi esperimenti di questo tipo vennero effettuati su strutture a tunnelling risonante di GaAs/AlGaAs modellate a formare *sub-micron pillars*. Questi *pillars* sono detti **quantum dots verticali**. Gli esperimenti effettuati su tali tipologie di sistemi hanno mostrato caratteristiche I-V che possono essere attribuite a fenomeni di tunnelling risonante attraverso gli stati quantici che si generano dal confinamento laterale. Come detto il punto di partenza di un simile dispositivo è un 2DEG all'interfaccia di una eterostruttura quale GaAs/AlGaAs: a basse temperature i soli elettroni mobili sono confinati all'interfaccia GaAs/AlGaAs che tipicamente si trova a circa 100 nm sotto la superficie. Tipici valori di densità elettronica in questo sistema bidimensionale sono $n_d \sim 10^{15} \text{ m}^{-2}$; per definire un piccolo dispositivo, devono essere modellati dei gates metallici sulla superficie del wafer tramite litografia a fascio elettronico. Una d.d.p. negativa applicata tra i gates di superficie genera delle barriere tunnel nel 2DEG.

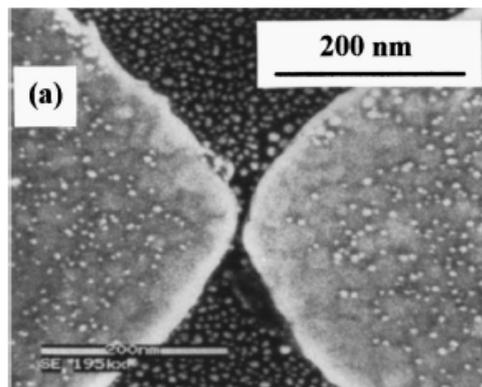


Fig.2.3 Immagine al SEM (*Scanning Electron Microscopy*) di un tipico dispositivo a quantum dot laterale realizzato in una eterostruttura GaAs/AlGaAs. Il gas di elettroni bidimensionale si trova a circa 100 nm sotto la superficie. Una d.d.p. negativa viene applicata ai gates di superficie. Il dot che ne risulta contiene pochi elettroni che sono accoppiati tramite barriere tunnel alle grandi regioni 2DEG. Le barriere tunnel e la dimensione del dot possono essere variati individualmente tramite la d.d.p. applicata tra i gates di destra e sinistra.[17]

Il sistema così realizzato è adatto alla misura delle proprietà di trasporto in quanto, innanzitutto, la lunghezza d'onda degli elettroni alla energia di Fermi è $\lambda_F = (2\pi/n_d)^{1/2} \sim (80-30)\text{nm}$ (circa 100 volte più grande che in un metallo) ed, in secondo luogo, perché la mobilità di elettroni in un sistema bidimensionale può assumere valori anche dell'ordine di $1000 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ a cui corrisponde un libero cammino medio dell'ordine di $100 \mu\text{m}$. Questa tecnologia permette, così, di realizzare dispositivi molto più piccoli del libero cammino medio degli elettroni in essi presenti: il trasporto di elettroni in tali dispositivi viene definito *balistico*. In aggiunta, essendo la lunghezza d'onda dell'elettrone comparabile con le dimensioni del dispositivo, gli effetti quantistici diventano fondamentali. Così, tutta una serie di misure su questi sistemi, con diverse geometrie di gate, hanno portato alla scoperta di nuovi fenomeni di trasporto nanoscopico quale, ad esempio, la *trasmissione risonante coerente* (interpretabile in termini dei concetti esposti nel paragrafo 1) attraverso un dot e sistemi di dots.

2.3 TEORIA DEL TRASPORTO ATTRAVERSO QUANTUM DOTS

Ci si occuperà in questa sezione di sviluppare i principi base della teoria di trasporto attraverso un solo o sistemi di pochi quantum dots ponendo particolare attenzione nell'illustrare i vari dati sperimentali e la loro spiegazione teorica.

In particolare nei paragrafi da 2.3.1 a 2.3.6 si illustrano delle caratteristiche principali di quantum dots generici mentre nei paragrafi 2.3.7 e 2.3.8 si studieranno le proprietà di quantum dots metallici, per poi trattare nel paragrafo 2.3.9 i quantum dots a semiconduttore. In particolare si osservi che i paragrafi 2.3.5 e 2.3.6 sono incentrati sull'esposizione delle caratteristiche più significative di sistemi formati da più quantum dots

mentre i paragrafi 2.3.7, 2.3.8, 2.3.9 sono rivolti alla esposizione e comprensione dei più importanti effetti di elettrone singolo. Di conseguenza al fine di semplificare lo studio di tali effetti, si fa riferimento in detti tre paragrafi a sistemi il quanto più semplici possibile e dunque costituiti da un solo dot. Le caratteristiche di base di questi effetti si mantengono, naturalmente, anche per sistemi complessi di pochi o molti quantum dots.

2.3.1 PREMESSA

Nel seguente studio ci si riferirà ad un quantum dot nell'accezione generale di una "isola" (insieme di atomi di natura metallica o semiconduttrice) collegata a due elettrodi tramite giunzioni tunnel.

Quando un elettrone viene trasferito da un *reservoir* al quantum dot si verifica un riarrangiamento di carica nell'elettrodo e quindi un cambiamento nel potenziale elettrostatico del sistema. Date le dimensioni ridotte del dot tale variazione di potenziale può essere più grande dell'energia termica $k_B T$, particolarmente quando il sistema sia a bassa temperatura. Una grande variazione dell'energia elettrostatica conseguente al trasferimento di una singola carica può risultare essere entro una gap energetica dell'elettrone confinato nel dot originando l'effetto del **Coulomb blockade**, fenomeno per cui il tunnelling di elettroni è inibito finchè la d.d.p. applicata dall'esterno al sistema sia tale da rendere questa variazione di energia eguale o più grande della *charging energy*. Al Coulomb blockade si affiancano tutta una serie di altri effetti di elettrone singolo tipici dei sistemi nanoscopici come il fenomeno di **Coulomb oscillations**, di **Coulomb staircase** e così via.

Nonostante questi effetti siano causati da tunnelling di elettroni singoli essi possono essere descritti in termini di quantità fisiche macroscopiche quali capacità e resistenze.

2.3.2 TUNNELLING DI CARICHE QUANTIZZATE

Si consideri un quantum dot schematizzato come in figura seguente:

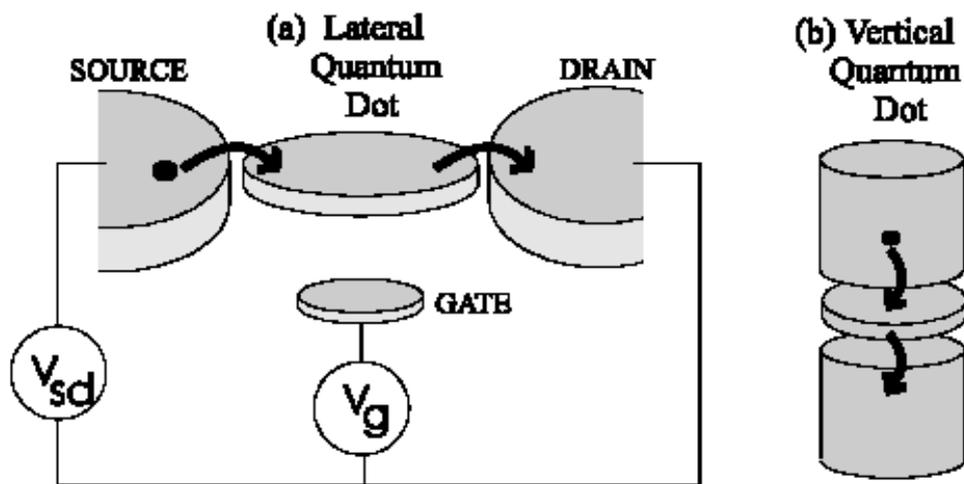


Fig.2.4 Schematizzazione di un quantum dot: un piccolo conduttore è accoppiato a tre terminali. Source e drain connettono il piccolo conduttore a misuratori macroscopici di corrente e voltaggio. Il terzo terminale stabilisce un accoppiamento elettrostatico o capacitivo e può essere utilizzato come un elettrodo di gate.[17]

Supponiamo, inizialmente, che il piccolo conduttore non sia accoppiato a source e drain: allora esso è una *isola* neutra. Se adesso si considera l'*isola* accoppiata agli elettrodi di source e drain, essendo permessi tunnelling di elettroni tra di essi, il numero di elettroni N entro l'*isola*, in conseguenza ai suddetti tunnelling, si aggiusta per rendere minima l'energia totale del sistema.

Si supponga l'avvenimento di un processo di tunnelling: allora la carica dell'*isola* varia di una quantità quantizzata e ; a questa variazione di carica è associata una variazione di energia coulombiana convenientemente espressa in termini di una capacità C dell'*isola*. Una variazione di carica e dell'*isola* comporta una variazione del potenziale elettrostatico pari alla *charging*

energy $E_C = e^2/2C$. Quest'ultima diviene importante allorchè superi l'energia termica $k_B T$. Inoltre è importante che le barriere di potenziale tra l'isola e gli elettrodi siano sufficientemente opache da poter affermare con una alta probabilità che l'elettrone ad un certo istante di tempo si trovi o nel source, o nel drain, o nell'isola. In altri termini, è importante che le fluttuazioni quantiche nel numero N attraverso le barriere avvengano in tempi molto maggiori rispetto ai tempi di misura. Questa condizione si ripercuote sulla resistenza tunnel totale R_t delle barriere. Per capire ciò, consideriamo il tempo tipico impiegato per caricare o scaricare l'isola: $\Delta t = R_t \times C$. Utilizzando il principio di indeterminazione di Heisenberg si ricava: $\Delta E \Delta t = (e^2/2C) R_t C > \hbar$ il che implica che R_t sia più grande di $\frac{\hbar}{e^2} = R_Q \approx 25.8 k\Omega$ che costituisce il quanto di resistenza.

In sintesi, quindi, affinché possano essere osservati effetti dovuti alla quantizzazione di carica in un dot, devono essere verificate le due condizioni

$$R_t \gg R_Q \quad (2.1)$$

$$e^2/C \gg k_B T \quad (2.2).$$

Il primo criterio va rispettato quando si operi l'accoppiamento del dot al source ed al drain, mentre il secondo durante la costruzione del dot stesso.

Mentre il tunnelling di cariche singole cambia l'energia elettrostatica dell'isola di un valore discreto, una d.d.p. V_g applicata al gate (di capacità C_g) può cambiare l'energia elettrostatica dell'isola in modo continuo. In termini di carica, il processo di tunnelling cambia la carica dell'isola in modo discreto mentre il potenziale di gate induce una carica efficace continua $q = C_g V_g$. Questa carica è continua nonostante l'unità di scala sia la carica elementare e . La rapida variazione di V_g induce nel dot una carica che sarà compensata, in intervalli periodici, dal tunnelling di cariche discrete nel dot. Questa competizione tra la carica continuamente indotta nel dot e la compensazione discreta porta al cosiddetto fenomeno di **Coulomb**

oscillations in una misura della corrente attraverso il dot in funzione del potenziale di gate quando sia fissato il potenziale source-drain. Un esempio di questa misura è riportato nella figura 2.5.a. In una valle tra le oscillazioni, il numero di elettroni nel dot è fissato e necessariamente eguale ad un intero N . Nelle valli successiva a questa, verso destra, il numero di elettroni è aumentato a $N+1$. Tra le due configurazioni stabili N ed $N+1$ esiste una “degenerazione di carica” nel senso che il numero di elettroni può alternarsi tra N ed $N+1$. Queste fluttuazioni permesse nel numero di elettroni (secondo la sequenza $N \rightarrow N+1 \rightarrow N \rightarrow \dots$) porta al fluire di una corrente attraverso il dot e risulta visibile nei picchi osservati.

Si può effettuare una misura alternativa fissando il potenziale di gate e variando il potenziale source-drain V_{SD} . Una tale misura è mostrata in figura 2.5.b. In essa si osserva una caratteristica corrente-tensione non lineare che esibisce un marcato fenomeno di **Coulomb staircase**: gradini di corrente si presentano ciascuno ad una tensione di soglia ($\sim e^2/2C$) alla quale un elettrone extra acquista una energia necessaria per entrare nell’isola. La figura mostra inoltre come la tensione di soglia sia periodica rispetto al potenziale di gate in accordo con il Coulomb oscillations di figura 2.5.a.

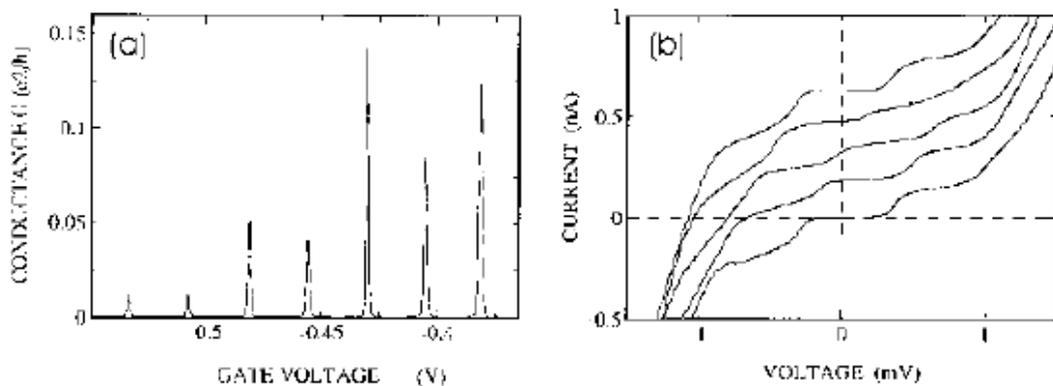


Fig.2.5.a Esempio di una misura di Coulomb oscillations per illustrare gli effetti di singolo elettrone sulla conduttanza macroscopica del sistema. La conduttanza è il rapporto I/V_{SD} ed il periodo nel potenziale di gate è circa e/C_g . [17]

Fig.2.5.b Esempio di una misura di Coulomb staircase nella caratteristica $I-V_{SD}$. Le differenti curve sono prese a cinque diversi valori di potenziale di gate per illustrare la periodicità in accordo con le oscillazioni mostrate in 2.5.a. [17]

2.3.3 QUANTIZZAZIONE DEI LIVELLI ENERGETICI

Gli elettroni che si trovano in un dot occupano livelli di energia quantizzati. Affinché tali livelli energetici possano essere risolti è necessario che la loro spaziatura ΔE sia tale che $\Delta E \gg k_B T$. Per una scatola di lato L la spaziatura tra i livelli energetici all'energia di Fermi, includendo la degenerazione di spin, è:

$$\Delta E = \frac{(N/4)\hbar^2\pi^2}{mL^2} \quad 1D \quad (2.3)$$

$$\Delta E = \frac{(1/\pi)\hbar^2\pi^2}{mL^2} \quad 2D \quad (2.4)$$

$$\Delta E = \frac{(1/3\pi^2 N)^{1/3}\hbar^2\pi^2}{mL^2} \quad 3D \quad (2.5)$$

essendo N il numero di elettroni nel dot ed m la massa dell'elettrone.

Così la scala caratteristica delle energie è $\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$. Per una scatola 1D la spaziatura tra i livelli cresce all'aumentare di N , in quella 2D è costante con N e in quella 3D decresce al crescere di N .

Il fatto che la quantizzazione di carica ed energia possano drasticamente influenzare il trasporto attraverso un quantum dot è chiaramente mostrato dai fenomeni di Coulomb oscillations e Coulomb staircase mostrati nelle figure 2.5.a e 2.5.b.

2.3.4 REGIMI DI FUNZIONAMENTO DI UN QUANTUM DOT

Le energie caratteristiche coinvolte nello studio di un dot sono:

- la *charging energy* $E_C = e^2/2C$;
- la spaziatura tra i livelli energetici accessibili agli elettroni nel dot ΔE ;
- l'energia termica $k_B T$.

In base a determinati rapporti tra queste energie le caratteristiche del dot variano sensibilmente. Si è soliti distinguere i seguenti regimi fondamentali di funzionamento di un dot:

- (a) $e^2/2C \ll k_B T$: in tal caso nei fenomeni di trasporto nei dots la quantizzazione di carica non è apprezzabile;
- (b) $\Delta E \ll k_B T \ll e^2/2C$: questo caso viene detto *regime di Coulomb blockade classico (o metallico)*. Quando il dot si trovi in questo regime il trasporto di carica avviene con l'eccitazione termica di molti livelli energetici dello stesso. Una approfondita teoria di trasporto in sistemi di dots in tale regime è sviluppata nel **modello ortodosso** (Averin, Likharev, Korotkov, Mullen[20, 21, 22, 41, 51,55, 56, 57,61]);
- (c) $k_B T \ll \Delta E < e^2/2C$: questo caso viene detto *regime di Coulomb blockade quantistico*. Quando il dot si trovi in questo regime il trasporto di carica avviene con l'eccitazione termica di uno o pochi livelli energetici dello stesso.

Nei paragrafi seguenti ci si occuperà dello studio del regime di Coulomb blockade classico, dunque della descrizione del modello ortodosso, e di fenomeni che vanno oltre tale modello (es. fenomeni di *cotunnelling*), per poi passare allo studio dettagliato dei fenomeni di Coulomb blockade e Coulomb staircase in un sistema basilare quale una doppia giunzione tunnel ed in un sistema più complesso quale un **SET (Single Electron Transistor)**.

2.3.5 PROPRIETÀ DI TRASPORTO IN SISTEMI DI QUANTUM DOTS IN REGIME DI COULOMB BLOCKADE CLASSICO: MODELLO ORTODOSSO

Si consideri un dispositivo a singolo elettrone costituito da un sistema di dots separati da barriere di potenziale. Le assunzioni di base del modello ortodosso, per la descrizione di un tale sistema, sono:

- 1) $\Delta E \ll k_B T \ll e^2/2C$: ogni dot del sistema si trova in regime di Coulomb blockade classico. In detta situazione gli stati energetici di ogni dot possono essere trattati come un quasi continuo (la quantizzazione di tali livelli non è apprezzabile).
- 2) Il tempo τ_t di tunnelling dell'elettrone attraverso le barriere è molto piccolo in confronto ad altri tempi coinvolti (quali i tempi di misura e gli intervalli di tempo che trascorrono tra due successivi eventi di tunnelling); Questa assunzione è verificata per tutte le barriere tunnel utilizzate in dispositivi ad elettrone singolo che abbiano un interesse pratico: infatti, di solito, per essi è $\tau_t \sim 10^{-15}$ s.
- 3) Processi quantistici coerenti consistenti in più eventi di tunnelling simultanei (cotunnelling) vengono trascurati. Questa assunzione è valida allorquando la resistenza R_t totale di tutte le barriere del sistema sia molto più grande del quanto di resistenza R_Q .

Nonostante le assunzioni sopra esposte, il modello ortodosso dà risultati in buon accordo con i dati sperimentali sia per i sistemi di dots metallici (i cui elettroni hanno λ_F , lunghezza d'onda sulla superficie di Fermi, piccola) che per quelli a semiconduttore (i cui elettroni hanno λ_F molto più grande rispetto a quelli dei dots metallici).

Il risultato principale di questo modello è il seguente:

il tunnelling di un singolo elettrone attraverso una particolare barriera tunnel è sempre un evento casuale, con una certa *rate* Γ (probabilità per unità di tempo) che dipende esclusivamente dalla riduzione ΔW di energia libera (elettrostatica) del sistema conseguente a questo evento di tunnelling. Questa dipendenza è espressa dalla formula:

$$\Gamma(\Delta W) = \left(\frac{1}{e}\right) I\left(\frac{\Delta W}{e}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta W}{k_B T}\right)\right]^{-1} \quad (2.6)$$

dove $I(V)$ è la curva caratteristica I-V della barriera tunnel in assenza di effetti di singolo elettrone (in molti casi è accettabile l'approssimazione Ohmica $I(V) = V/R$). ΔW va determinata caso per caso in base alle caratteristiche elettrostatiche del sistema. Frequentemente viene, però, utilizzata l'espressione generale

$$\Delta W = \frac{e(V_i + V_f)}{2} \quad (2.7)$$

essendo V_i e V_f le d.d.p. che cadono ai capi della barriera rispettivamente prima e dopo l'evento di tunnelling.

La figura 2.6.a mostra la dipendenza data dalla formula (2.6): si può notare che a basse temperature ($k_B T \ll \Delta W$) la rate di tunnelling è proporzionale a ΔW . Questo è facile da intuire pensando che un aumento della d.d.p. applicata aumenta il numero di stati elettronici permessi nell'elettrodo source, il che aumenta la capacità degli elettroni di operare tunnelling verso gli stati vuoti dell'elettrodo drain (figura 2.6.b).

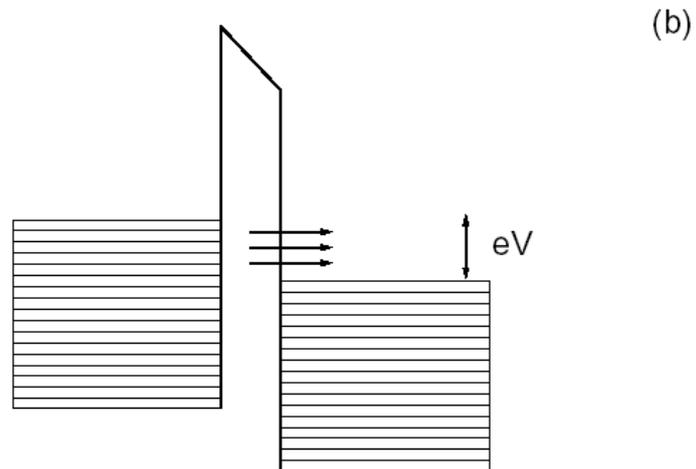
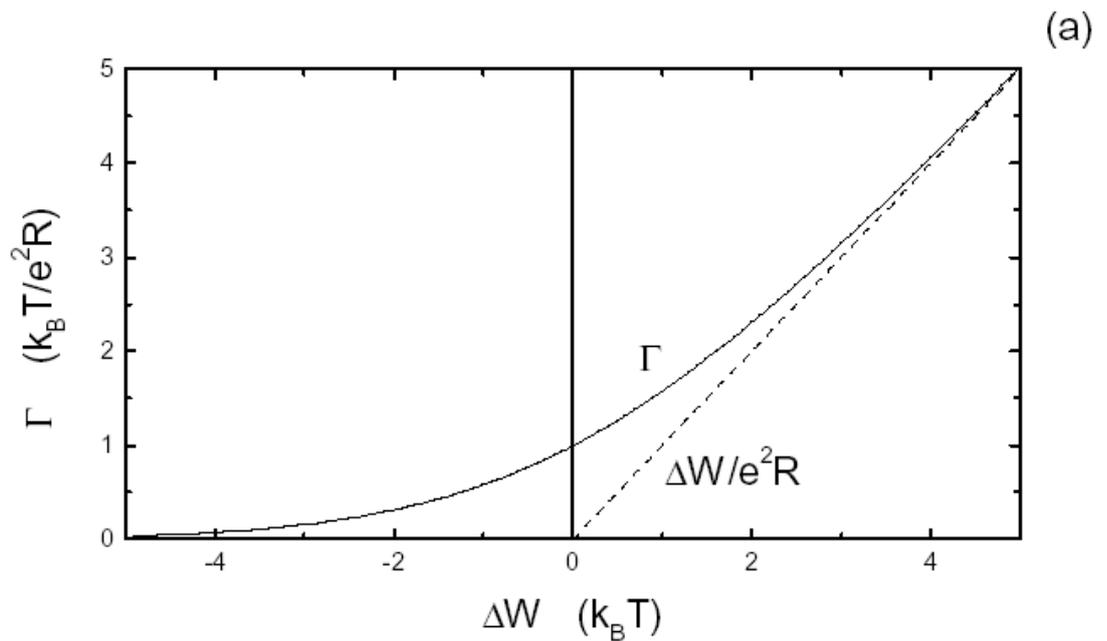


Fig.2.6.a Rate Γ in funzione di ΔW in accordo con (2.6) secondo il modello ortodosso.[21]

Fig.2.6.b Diagramma energetico di una giunzione tunnel che spiega perché $\Gamma \propto \Delta W$ nella condizione $\Delta W \gg k_B T$. [21]

Sebbene (2.6) e (2.7) siano formule piuttosto semplici, persino il calcolo delle proprietà di sistemi di base a singolo elettrone porta a parecchi problemi tecnici: in molte situazioni, sono possibili parecchi eventi di tunneling contemporaneamente ed il modello ortodosso perde di validità. Inoltre diviene inevitabile l'utilizzo di un qualche schema di calcolo statistico. Per sistemi con relativamente poche isole e con un numero limitato di possibili stati di carica $\{i\}$, la (2.6) può essere sostituita dal sistema di “*master equations*”

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j (\Gamma_{j \rightarrow i} p_j - \Gamma_{i \rightarrow j} p_i) \quad (2.8)$$

che descrive l'evoluzione temporale della probabilità p_i di ogni stato. Una volta che sia stato risolto questo sistema le probabilità p_i possono essere utilizzate per il calcolo dei valori medi e delle fluttuazioni di qualsiasi variabile inerente al sistema in esame.

Per sistemi più complessi, lo spazio multidimensionale di tutti i possibili stati di carica accessibili al sistema diventa così grande che l'unica via pratica di risoluzione è quella di simulare le dinamiche casuali del sistema tramite un *metodo Monte Carlo*. In questo tipo di procedura l'equazione (2.6) viene sfruttata per stabilire la corretta statistica degli eventi generati casualmente. Dopo che siano state accumulate un sufficiente numero di implementazioni, le variabili di interesse del sistema possono essere valutate dalla media dei risultati ottenuti da tali simulazioni.

2.3.6 EFFETTI OLTRE IL MODELLO ORTODOSSO IN SISTEMI DI QUANTUM DOTS

Gli esperimenti sui dispositivi a singolo elettrone hanno mostrato molte caratteristiche che non rientrano nel modello ortodosso. In sistemi non superconduttori, i più importanti sono:

1) *Cotunnelling*: è l'effetto che consiste nel tunnelling di parecchi ($n > 1$) elettroni, entro il dot, attraverso differenti barriere allo stesso tempo a causa di un processo di trasporto coerente. La rate di questo processo può essere espressa come

$$\Gamma_C(\Delta W) \approx \left(\frac{R_Q}{R_t} \right)^{n-1} \Gamma(\Delta W) \quad (2.9)$$

essendo n il numero di elettroni che operano tunnelling contemporaneamente attraverso le barriere, R_Q il quanto di resistenza, R_t la resistenza totale del sistema e $\Gamma(\Delta W)$ espressa dalla (2.6).

2) *Quantizzazione dei livelli energetici del dot*: Per dots molto piccoli la separazione tra i livelli energetici ΔE può divenire più grande della charging energy $E_C = e^2/2C$ e della energia termica $k_B T$. Una generalizzazione del modello ortodosso sviluppata per questo caso da Averin e Korotkov[76] porta al seguente risultato: considerata una situazione per cui il tunnelling sia possibile solo tra dots con livelli energetici discreti ed elettrodi a spettro continuo e con i dots separati da barriere di potenziale identiche molto sottili, detta Γ_0 la loro *seed tunnelling rate*⁽²⁾ e supposto $\hbar\Gamma_0 < k_B T$, allora la rate di tunnelling attraverso una barriera del sistema è esprimibile come

$$\Gamma'(\Delta W) = \Gamma_0 [1 + \exp(-\Delta W / k_B T)]^{-1} \quad (2.10)$$

e l'intero sistema può ancora essere descritto dal sistema di equazioni (2.8) dove però la somma va estesa a due indici: uno per il numero totale di elettroni del sistema e l'altro per la distribuzione di elettroni tra i livelli energetici dei dot (quando sia fissato il numero di elettroni del sistema). Si può notare che per $\Delta W \gg k_B T$ la (2.10) dà $\Gamma' = \Gamma_0 \approx$ costante. La figura 2.7.a mostra la dipendenza data dalla formula (2.10), mentre la figura 2.7.b mostra il diagramma energetico che illustra la situazione in esame.

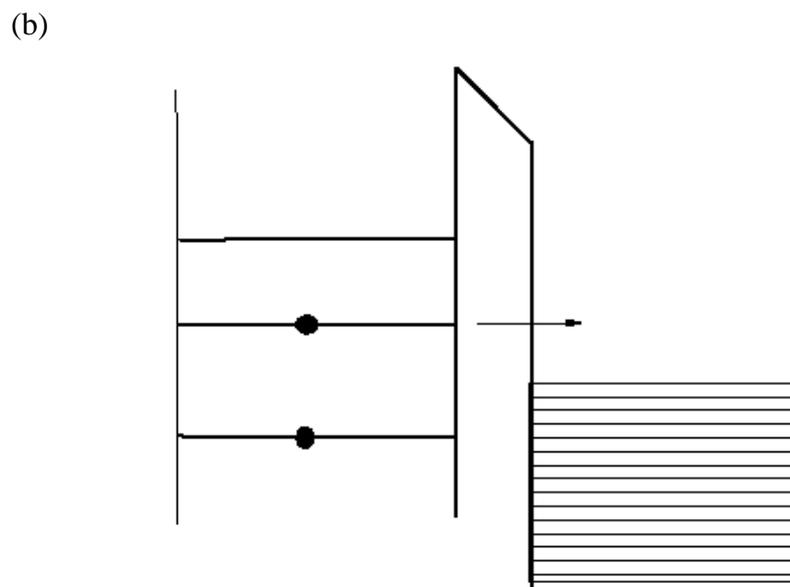
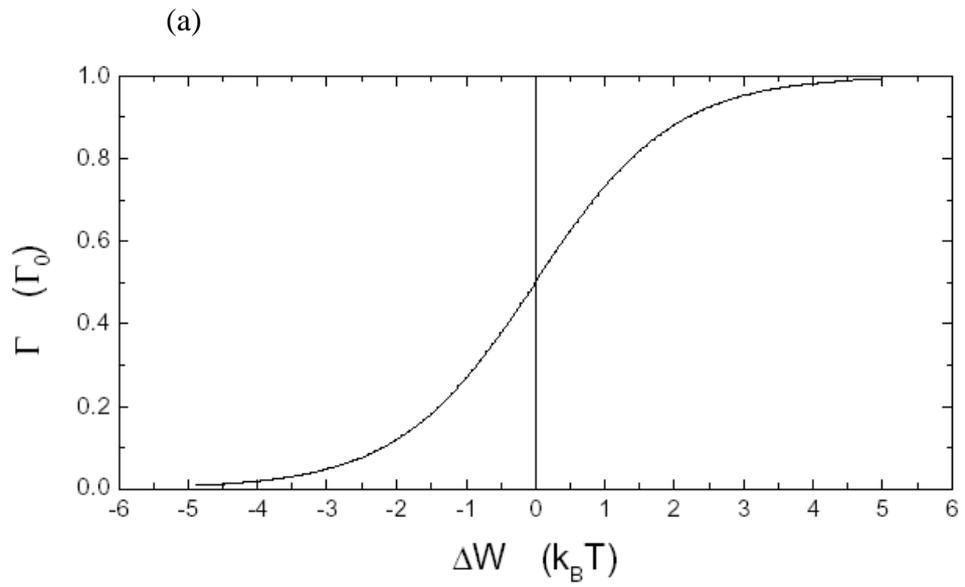


Fig.2.7.a Rate di tunnelling di elettroni da/a un livello discreto di energia a/da un mare di elettroni di Fermi.[17]

Fig.2.7.b Diagramma a bande di energia di una giunzione tunnel.[17]

2.3.7 COULOMB BLOCKADE E COULOMB STAIRCASE IN UNA DOPPIA GIUNZIONE TUNNEL

Si consideri un tipico sistema costituito da un solo dot: una doppia giunzione tunnel. Essa si ottiene dalla schematizzazione in figura 2.4 escludendo l'accoppiamento di gate. Una semplice analisi quantitativa di un tale dispositivo è utile per la comprensione dei fenomeni di Coulomb blockade e Coulomb staircase. Una tipica misura di questi effetti su un sistema di questo tipo è data in figura 2.8:

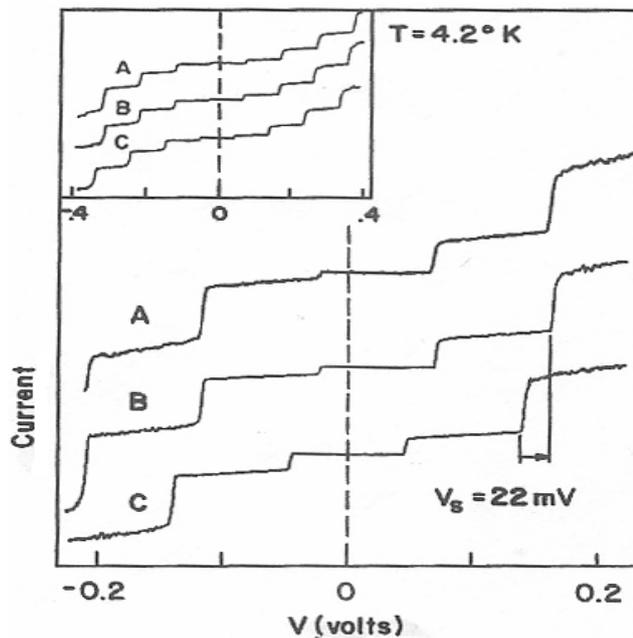


Fig.2.8 Caratteristiche I-V sperimentale (A) e teoriche (B e C) ricavate da un STM contattato ad una isola di In di diametro 10 nm, che mostrano il fenomeno di Coulomb blockade e Coulomb Staircase per un sistema a doppia giunzione.[9]

Nella figura 2.8 si può osservare che la corrente è essenzialmente zero vicino all'origine, evidenziando, così, l'effetto di Coulomb blockade, per poi aumentare a salti, dando la tipica forma di un fenomeno di Coulomb

staircase. Un altro fatto notevole da osservare in tale caratteristica è che essa non è simmetrica rispetto all'origine: questo è dovuto alla presenza, non controllata, di "cariche di fondo" che contribuiscono ad una *energy charging* aggiuntiva del dot. Queste cariche casuali sono molto difficili da eliminare e costituiscono un serio problema nella realizzazione di un qualsiasi dispositivo ad elettrone singolo.

La rappresentazione circuitale della doppia giunzione tunnel può essere data nei seguenti termini:

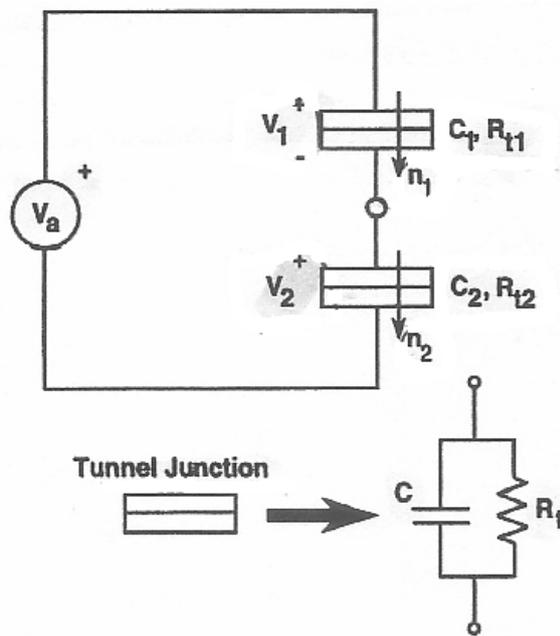


Fig.2.9 Circuito equivalente di una isola accoppiata a source e drain attraverso due giunzioni tunnel di capacità C_1 e C_2 e resistenze R_{t1} e R_{t2} ; n_1 è il numero di elettroni che entrano nell'isola per tunnelling attraverso la giunzione 1, e n_2 è il numero di elettroni che escono dall'isola per tunnelling attraverso la giunzione 2.[9]

In questa analisi si assume che le resistenze delle barriere tunnel siano indipendenti dalla d.d.p. che cade ai capi delle giunzioni ed, inoltre, che gli elettroni che attraversano una giunzione o l'altra subiscano immediatamente scattering (elettrone-elettrone) cosicché si possano escludere eventuali processi simultanei di tunnelling risonante attraverso entrambe le barriere.

Diremo:

$V_{SD} = V_a$: la d.d.p. source-drain applicata dall'esterno;

V_1 : la frazione di V_a che cade ai capi della giunzione 1;

V_2 : la frazione di V_a che cade ai capi della giunzione 2;

C_1 : la capacità associata alla giunzione 1;

C_2 : la capacità associata alla giunzione 2;

n_1 : il numero di elettroni che entrano nell'isola per tunnelling attraverso la giunzione 1;

n_2 : il numero di elettroni che escono dall'isola per tunnelling attraverso la giunzione 2;

R_{t1} : la resistenza associata alla giunzione 1;

R_{t2} : la resistenza associata alla giunzione 2;

$Q_1 = C_1 V_1$: la carica associata al capacitore 1; (2.11)

$Q_2 = C_2 V_2$: la carica associata al capacitore 2; (2.12)

$n = n_2 - n_1$: il numero di elettroni in eccesso entro il dot (rispetto alla situazione di neutralità); (2.13)

$Q = Q_2 - Q_1 = -ne$: la carica elettronica in eccesso entro il dot; (2.14)

Dallo schema circuitale è, inoltre, evidente che debba essere

$$V_a = V_1 + V_2 \quad (2.15).$$

Per determinare V_1 in funzione di V_a è sufficiente partire dalla (2.14) e sfruttare successivamente in essa la (2.11), la (2.15), la (2.12); ciò è brevemente riportato di seguito:

$$Q_2 + ne = Q_1 \xrightarrow{(2.11)} Q_2 + ne = C_1 V_1 \xrightarrow{(2.15)} Q_2 + ne = C_1 (V_a - V_2) \xrightarrow{(2.12)}$$

$$C_2 V_2 + ne = C_1 (V_a - V_2)$$

da cui si ricava immediatamente

$$V_2 = \frac{1}{C_{eq}} (C_1 V_a - ne) \quad (2.16).$$

Analogamente si ottiene:

$$V_1 = \frac{1}{C_{eq}}(C_2 V_a + ne) \quad (2.17)$$

essendo

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (2.18).$$

L'energia coulombiana immagazzinata dal dot quando al suo interno siano presenti gli n elettroni in eccesso è:

$$E_S = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} \quad (2.19)$$

che può essere espressa nel modo seguente utilizzando (2.11), (2.12), (2.16), (2.17):

$$E_S = \frac{1}{2C_{eq}}(C_1 C_2 V_a^2 + Q^2) \quad (2.20).$$

Si consideri, ora, il lavoro svolto dal generatore di tensione per far entrare ed uscire la carica in eccesso dal dot. Esso può essere espresso come

$$L_S = \int V_a I(t) dt = V_a \Delta Q \quad (2.21)$$

essendo $I(t)$ la corrente fatta fluire attraverso il dot dal generatore, ΔQ la carica totale trasferita dal generatore attraverso il dot (includendo sia il numero intero di elettroni che operano il processo di tunnelling attraverso il dot sia la carica continua di polarizzazione che si ottiene come risposta della variazione di potenziale elettrostatico dello stesso dot).

Una variazione della carica dell'isola, dovuta al tunnelling di un elettrone attraverso la giunzione 2 (cosicché $n'_2 = n_2 + 1$) porta la carica del dot a

$Q' = Q+e$ ed il numero di elettroni in eccesso in esso a $n' = n-e$. In conseguenza a questo processo, la d.d.p. che cade ai capi della giunzione 1, secondo la (2.17), diviene $V'_1 = V_1-e/C_{eq}$. Per compensare questo fenomeno si avrà un passaggio di carica di polarizzazione attraverso il generatore di tensione. Quindi il lavoro totale fatto dal generatore per causare il passaggio degli n_2 elettroni attraverso la giunzione 2 è, sfruttando (2.11) e (2.12) :

$$L_S(n_2) = -n_2 e V_a \frac{C_1}{C_{eq}} \quad (2.22).$$

Procedendo con uno stesso ragionamento si trova che il lavoro totale svolto dal generatore per far passare n_1 elettroni attraverso la giunzione 1 è:

$$L_S(n_1) = -n_1 e V_a \frac{C_2}{C_{eq}} \quad (2.23).$$

Si è, ora, in grado di scrivere l'energia totale del circuito completo, includendo il generatore di tensione:

$$\begin{aligned} E(n_1, n_2) &= E_S - L_S = E_S - [L_S(n_2) - L_S(n_1)] = \\ &= \frac{1}{2C_{eq}} (C_1 C_2 V_a^2 + Q^2) + \frac{e V_a}{C_{eq}} (C_1 n_2 + C_2 n_1) \end{aligned} \quad (2.24).$$

Osserviamo, adesso, che a $T = 0$ il sistema tende ad evolvere spontaneamente dallo stato di massima energia a quello di minima. Quindi le transizioni tunnel che tenderebbero a far aumentare l'energia del sistema non sono permesse per $T \rightarrow 0$ (a temperature molto alte questa condizione viene meno a causa delle fluttuazioni termiche). La variazione di energia del sistema quando un elettrone attraversa la seconda giunzione è

$$\begin{aligned} \Delta E_2^\pm &= E(n_1, n_2) - E(n_1, n_2 \pm 1) = \frac{Q^2}{2C_{eq}} - \frac{(Q \pm e)^2}{2C_{eq}} \mp \frac{e V_a C_1}{C_{eq}} = \\ &= \frac{e}{C_{eq}} \left[-\frac{e}{2} \pm (en - V_a C_1) \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

(+ quando l'elettrone entra nel dot, - quando ve ne esce).

Similmente, la variazione di energia del sistema quando un elettrone attraversa la prima giunzione è

$$\Delta E_1^\pm = E(n_1, n_2) - E(n_1 \pm 1, n_2) = \frac{e}{C_{eq}} \left[-\frac{e}{2} \mp (en + V_a C_2) \right] \quad (2.26)$$

(+ quando l'elettrone entra nel dot, - quando ve ne esce).

Seguendo l'assunzione per cui a $T \rightarrow 0$ sono permessi solo i processi di tunnelling di elettroni per cui $\Delta E_j > 0$, e supponendo che inizialmente l'isola sia neutra (tale che $n = 0$), dalle equazioni (2.25) e (2.26) si deduce

$$\Delta E_1^\pm = -\frac{e^2}{2C_{eq}} \mp \frac{eV_a C_2}{C_{eq}} > 0 \quad (2.27)$$

$$\Delta E_2^\pm = -\frac{e^2}{2C_{eq}} \mp \frac{eV_a C_1}{C_{eq}} > 0 \quad (2.28).$$

Supponiamo per semplicità $C_1 = C_2 = C$.

Allora le condizioni (2.27) e (2.28) si ripercuotono nella seguente condizione per V_a :

$$|V_a| > \frac{e}{2C} \quad (2.29)$$

ed indicheremo

$$V_t = \frac{e}{2C} \quad (2.30)$$

come un valore di soglia.

In sintesi la (2.29) afferma questo: per $T \rightarrow 0$, quando la d.d.p. source-drain sia $V_a > V_t$ o $V_a < -V_t$, allora il passaggio di elettroni, e dunque di corrente, attraverso il dot è consentito, mentre quando sia $-V_t \leq V_a \leq V_t$ tale

passaggio è inibito. Questa regione di *Coulomb blockade* è il risultato diretto della energia coulombiana addizionale, e^2/C_{eq} , che deve essere spesa per far operare il tunnelling all'elettrone dentro o fuori il dot. L'effetto sulla caratteristica I-V è una regione di conduttanza molto bassa attorno all'origine, come mostrato in figura 2.8.

La figura 2.10 mostra il diagramma a bande di energia per una doppia giunzione tunnel e dà l'idea schematica del fenomeno di Coulomb blockade (sempre nell'ipotesi semplificatrice che le due capacità siano eguali).

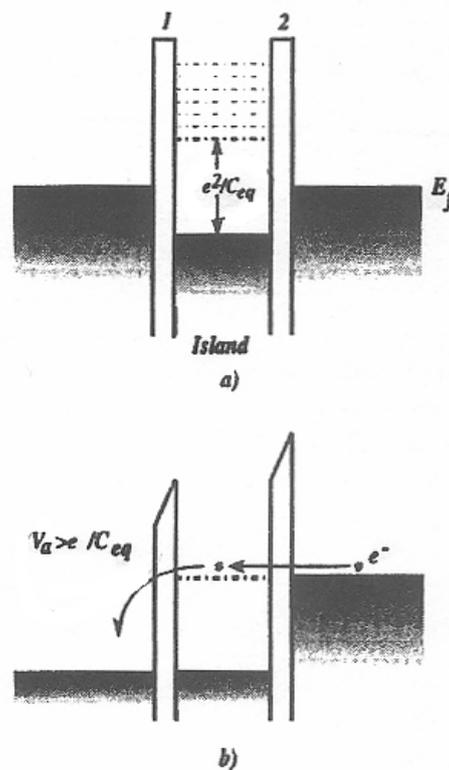


Fig.2.10 Diagramma a bande di una doppia giunzione tunnel (a) in equilibrio e (b) sotto l'effetto della V_a . Si osservi l'esistenza di una gap nella densità di stati dell'isola dovuta alla charging energy coulombiana, che proibisce il tunnelling di elettroni dentro e fuori l'isola sotto la d.d.p. soglia.[9]

La figura 2.10.a mostra il diagramma energetico della doppia giunzione quando questa sia in equilibrio. La presenza della gap energetica, di larghezza e^2/C_{eq} ($= e^2/2C$), per metà sopra e per metà sotto l'originale livello di Fermi dell'isola, giustifica il fatto che in tale situazione non vi siano,

nell'isola, stati permessi vuoti che possano “appoggiare” il passaggio di elettroni dal source al drain.

La figura 2.10.b mostra il diagramma energetico della doppia giunzione quando a questa sia applicata una $V_a > e/C_{eq}$. In tale situazione un elettrone può operare tunnelling dal source al dot, essendo ivi presenti stati accessibili vuoti, e dal dot al drain.

Si supponga sia stata raggiunta la condizione di soglia $V_a > e/2C$; in questa configurazione un elettrone ha operato tunnelling dal source all'isola ($n = 1$) come mostrato in 2.10.b. Inoltre l'energia di Fermi del dot è innalzata di $e^2/2C$ ed appare il gap energetico che proibisce il tunnelling di un secondo elettrone, almeno finché non sia raggiunta la condizione $V_a > 3e/2C$, come è evidente dalla equazione (2.25). In questo range di V_a non fluisce altra carica finché l'elettrone extra del dot operi tunnelling verso il drain, cosicché il dot torni allo stato $n = 0$. Questo processo abbassa l'energia di Fermi del dot e permette ad un altro elettrone il tunnelling dal source allo stesso dot e questo processo si ripete per valori periodici di V_a . Così, in sintesi, tutto un set di processi di tunnelling dentro e fuori il dot, che ripetono periodicamente in esso la configurazione $n = 1$, dà luogo ad una corrente non nulla attraverso il sistema che “salta” a gradini periodici in V_a .

Per poter osservare il Coulomb staircase di figura 2.8 è necessario che le due giunzioni siano asimmetriche, nel senso che abbiano o capacità o resistenze molto differenti. In questa analisi si sta supponendo che le due capacità siano identiche, per cui dovranno essere molto diverse le due resistenze: ad esempio $R_{t1} \gg R_{t2}$. Questo implica che la rate di tunnelling attraverso la giunzione 1 sia molto minore di quella della giunzione 2. Allora, non appena un elettrone operi tunnelling fuori dal dot attraverso la giunzione 1, esso verrà immediatamente sostituito da un altro che entra nel dot dalla giunzione 2. In queste condizioni si può assumere che la corrente attraverso il dot sia essenzialmente controllata dalla d.d.p. che cade ai capi della giunzione 1: $V_1 = V_a/2 + ne/2C$. Questo valore cambia di una quantità $e/2C$ ogni qualvolta venga raggiunta la condizione di soglia. Si potrà, quindi, approssimare che la variazione di corrente ad ogni salto sia

$$\Delta I \approx \frac{\Delta V_1}{R_{t1}} = \frac{e}{2CR_{t1}} \quad (2.31).$$

Tutto ciò spiega la “staircase structure” esibita dalla caratteristica I-V in figura 2.11 che illustra qualitativamente la “staircase structure” esibita dai dati sperimentali di figura 2.8.

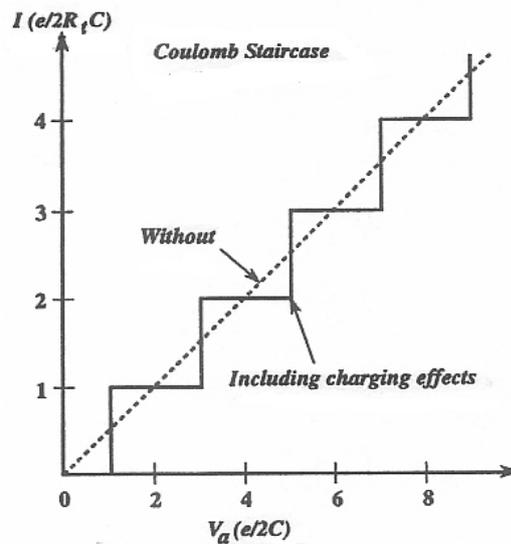


Fig.2.11 Caratteristica I-V ideale per una doppia giunzione asimmetrica con e senza la considerazione degli effetti di “Coulomb charging”.[9]

2.3.8 COULOMB BLOCKADE E COULOMB STAIRCASE IN UN SET (SINGLE ELECTRON TRANSISTOR)

Una altro tipico dispositivo a singolo dot è il SET. La tipica struttura di un SET è quella mostrata in figura 2.4. Tipicamente si realizza utilizzando la litografia a fascio elettronico. Un tale dispositivo mostra chiare evidenze sperimentali dei fenomeni di Coulomb blockade e Coulomb staircase, come riportato in figura 2.12.

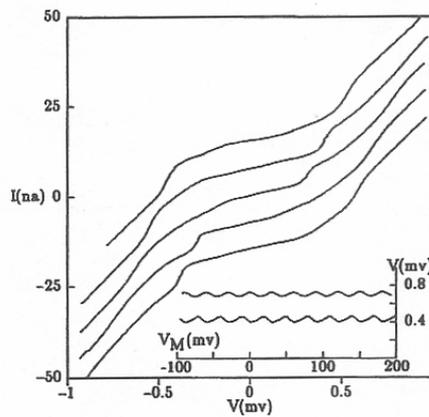


Fig.2.12 Curve I-V per un SET (a T = 1,1 K) per differenti valori di V_g . [9]

Il circuito equivalente di un SET può essere così schematizzato (i simboli utilizzati hanno lo stesso significato del paragrafo precedente):

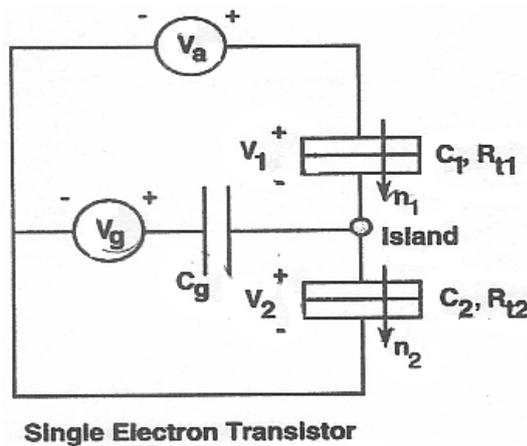


Fig.2.13 Circuito equivalente di un SET. [9]

Per capire il funzionamento di un SET si studierà il suo circuito equivalente. La d.d.p. V_g accoppia il dot ad un capacitore ideale C_g . Questo potenziale aggiuntivo modifica il bilanciamento di carica nel dot in modo tale che le equazioni (2.11) e (2.12) richiedono l'aggiunta della

$$Q_g = C_g(V_g - V_2) \tag{2.32}.$$

La carica dell'isola diviene

$$Q = Q_2 - Q_1 - Q_g = -ne + Q_p \quad (2.33)$$

essendo Q_p la carica di polarizzazione di fondo (non intenzionale) esistente sempre nelle strutture reali e dovuta a fenomeni casuali di intrappolamento di cariche vicino le giunzioni. L'esistenza di queste cariche casuali è fondamentale per la spiegazione della asimmetria della caratteristica I-V del dispositivo vicino all'origine (come è visibile in figura 2.11). Dalle equazioni (2.11), (2.12), (2.32), (2.33) si ricavano le seguenti espressioni per le d.d.p. che cadono ai capi delle giunzioni

$$V_1 = \frac{1}{C_{eq}} [(C_g + C_2)V_a - C_g V_g + ne - Q_p] \quad (2.34)$$

$$V_2 = \frac{1}{C_{eq}} [C_1 V_a + C_g V_g - ne + Q_p] \quad (2.35)$$

essendo

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_g \quad (2.36).$$

L'energia elettrostatica data dalla equazione (2.20) deve ora includere anche quella associata al capacitore di gate ($e^2/2C_g$), cosicché essa diviene

$$E_s = \frac{1}{2C_{eq}} [C_g C_1 (V_a - V_g)^2 + C_1 C_2 V_a^2 + C_g C_2 V_g^2 + Q^2] \quad (2.37).$$

Ora il lavoro svolto dalla sorgente di potenziale per operare il tunnelling di n_1 elettroni attraverso la giunzione 1 deve contenere anche il lavoro fatto dal generatore di gate ed analogamente quello svolto per realizzare il tunnelling di n_2 elettroni attraverso la giunzione 2

$$L_S(n_1) = -n_1 \left[\frac{C_2}{C_{eq}} eV_a + \frac{C_g}{C_{eq}} e(V_a - V_g) \right] \quad (2.38)$$

$$L_S(n_2) = -n_2 \left[\frac{C_1}{C_{eq}} eV_a + \frac{C_g}{C_{eq}} eV_g \right] \quad (2.39).$$

L'energia totale per uno stato di carica (n_1, n_2) del sistema è dato dalla (2.24). Considerando ora il potenziale di gate, le variazioni di energia del sistema rispettivamente per un evento di tunnelling attraverso la giunzione 1 e la giunzione 2 sono date da

$$\begin{aligned} \Delta E_1^\pm &= \frac{Q^2}{2C_{eq}} - \frac{(Q \mp e)^2}{2C_{eq}} \mp \frac{e}{C_{eq}} [(C_g + C_2)V_a - C_g V_g] = \\ &= \frac{e}{C_{eq}} \left(-\frac{e}{2} \mp [en - Q_p + (C_g + C_2)V_a - C_g V_g] \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_2^\pm &= \frac{Q^2}{2C_{eq}} - \frac{(Q \pm e)^2}{2C_{eq}} \mp \frac{e}{C_{eq}} [C_1 V_a + C_g V_g] = \\ &= \frac{e}{C_{eq}} \left(-\frac{e}{2} \pm [en - Q_p - C_1 V_a - C_g V_g] \right) \end{aligned} \quad (2.41).$$

Rispetto alle equazioni (2.25) e (2.26), in questo caso dalle due equazioni sopra riportate possiamo vedere che il potenziale di gate permette di variare la carica efficace del dot e quindi di variare la regione di Coulomb blockade cambiando V_g . A basse temperature, la condizione per il tunnelling è $\Delta E_{1,2} > 0$, di modo che dopo il tunnelling il sistema tenda allo stato di minima energia. La carica casuale di polarizzazione Q_p agisce come un offset efficace per il potenziale di gate; per questo è conveniente definire un nuovo potenziale di gate

$$V_g' = V_g + Q_p / C_g \quad (2.42).$$

Dunque, la condizione poco sopra espressa dà, utilizzando (2.40) e (2.41):

$$-\frac{e}{2} \mp [en + (C_g + C_2)V_a - C_g V'_g] > 0 \quad (2.43)$$

$$-\frac{e}{2} \pm [en - C_1 V_a - C_g V'_g] > 0 \quad (2.44).$$

Queste ultime quattro equazioni possono essere utilizzate per costruire il *diagramma di stabilità* del SET nel piano $V_a V_g$. Tale diagramma mostra le regioni stabili corrispondenti ad ogni valore di n per cui non può avvenire nessun tunnelling. Un diagramma di questo tipo è mostrato in figura 2.14, nel caso semplificato $C_g = C_2 = C$, $C_1 = 2C$.

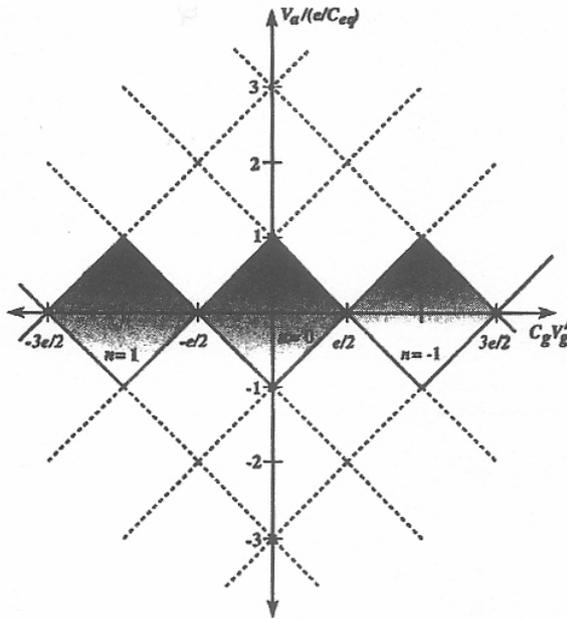


Fig.2.14 Diagramma di stabilità di un SET per il caso $C_2 = C_g = C$, $C_1 = 2C$. Esso illustra, per diversi numeri di elettroni nel dot, le regioni di energia per cui a $T = 0$ il tunnelling è proibito. Le aree ombreggiate corrispondono alle regioni di energia per cui non può avvenire tunnelling attraverso entrambe le giunzioni, e, quindi, rappresentano regioni stabili di numeri fissati di elettroni.[9]

Il significato fisico del diagramma di stabilità riportato sopra è il seguente: le linee rappresentano le condizioni energetiche per l'inizio del fenomeno di tunnelling per differenti valori di n (come espresso dalle (2.43) e (2.44)). Le aree trapezoidali ombreggiate corrispondono alle regioni energetiche per cui

le (2.43) e (2.44) non hanno soluzioni, e, dunque, per cui si ha effetto di Coulomb blockade. Ognuna di tali regioni corrisponde a differenti numeri interi di elettroni nel dot, che sono stabili nel senso che questo stato di carica non può cambiare, almeno a basse temperature (quando le fluttuazioni termiche siano trascurabili). Il potenziale di gate permette, quindi, di variare opportunamente la regione di stabilità, essenzialmente aggiungendo o sottraendo un elettrone per volta al dot. Per un dato valore di V_g , il range di V_a per cui si ha Coulomb blockade è dato dall'estensione verticale della corrispondente regione ombreggiata. Per il caso della figura 2.14 la inibizione massima della corrente si ottiene per $C_g V'_g = me$, con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Invece, quando $C_g V'_g = \frac{m}{2}e$ l'ampiezza delle regioni di Coulomb blockade diventa nulla ed il tunnelling può avvenire. Di conseguenza si ottiene anche il fenomeno per cui a piccoli valori di V_a , una misura di corrente attraverso il dot in funzione di V_g esibisce dei picchi in corrispondenza di valori semi interi di Q_g (figura 2.15). La distanza tra due picchi successivi è $\Delta V_g = e/C_g$.

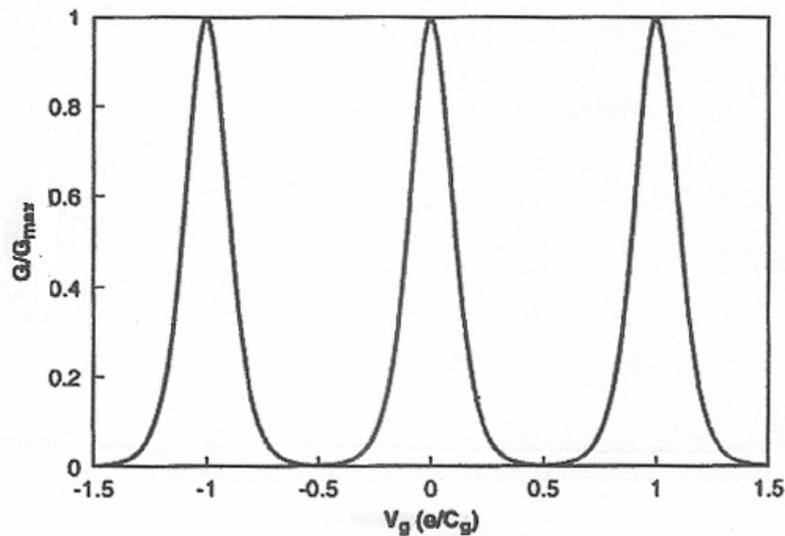


Fig.2.15 Fenomeno di Coulomb oscillations: conduttanza del SET in funzione di V_g (per T piccola).[9]

Si può mostrare[17] che nel caso $k_B T \ll e^2/C$ (quindi il caso in esame di basse temperature) vale la relazione

$$\frac{G}{G_{\max}} \approx \cosh^{-2} \left[\frac{e(C_g / C_{eq})(V_g^r - V_g)}{2.5k_B T} \right] \quad (2.45)$$

essendo V_g^r il valore di V_g per cui la quantità $C_g V_g^r$ è un multiplo semi intero di e .

Infine, l'esistenza di picchi per il sistema in esame può essere più chiaramente capita analizzando la figura 2.16, che mostra il diagramma a bande di energia dello stesso.

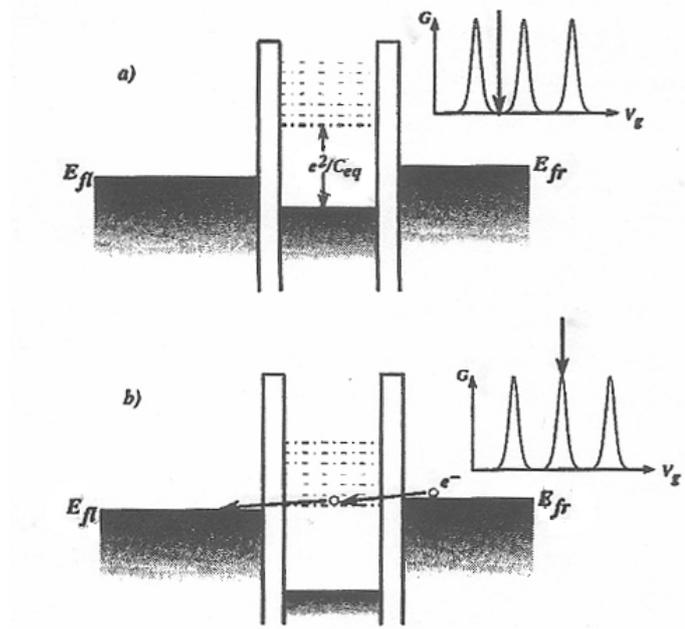


Fig.2.16 Diagramma a bande di energia per un SET, che illustra la ragione dei picchi di conduttanza dovuti al Coulomb blockade.[9]

2.3.9 COULOMB BLOCKADE IN QUANTUM DOTS A SEMICONDUCTTORE

Le proprietà esposte nei paragrafi 2.3.7 e 2.3.8 valgono essenzialmente per dot di tipo metallico. In questo paragrafo si intendono esporre le caratteristiche basilari dei dots a semiconduttore.

La principale differenza tra i quantum dots a semiconduttore e quelli metallici risiede nella coesistenza del Coulomb blockade e la quantizzazione dei livelli di energia. Questo fatto porta, nella caratteristica I-V di un dot a semiconduttore, ad una struttura discreta dovuta al tunnelling attraverso livelli discreti in aggiunta al fenomeno di Coulomb blockade.

Per lo studio di un dot a semiconduttore ci si riferirà al circuito equivalente di figura 2.13 (in sostanza si studierà un SET in cui il dot va inteso come una isola di materiale semiconduttore) e gli eventuali simboli ripresi in questo paragrafo da quello precedente hanno lo stesso significato. In effetti questo circuito rappresenta la struttura di base per i più rilevanti esperimenti sui quantum dots a semiconduttore. Il gate può rappresentare o dei gates Schottky sulla superficie di una struttura 2DEG, o un potenziale connesso al substrato che varia la concentrazione di elettroni nel canale di un 2DEG. Come mostrato in figura 2.16 per un sistema metallico la condizione per ottenere Coulomb blockade è che il potenziale di gate sia tale che l'energia di Fermi del dot corrispondente all'aggiunta di un elettrone, $n+1$, si trovi tra le energie di Fermi di source e drain. Questa condizione genera la nascita dei picchi in una misura di conduttanza del sistema in funzione del potenziale di gate. In un analogo sistema in cui, però, il dot sia di natura semiconduttrice, è necessario tenere in conto la spaziatura tra gli stati energetici permessi del dot (in altri termini: mentre in un dot metallico si sono considerati gli stati energetici permessi agli elettroni come un sistema quasi continuo, questo non può essere fatto per uno a semiconduttore). Tutto questo è sinteticamente illustrato in figura 2.17.

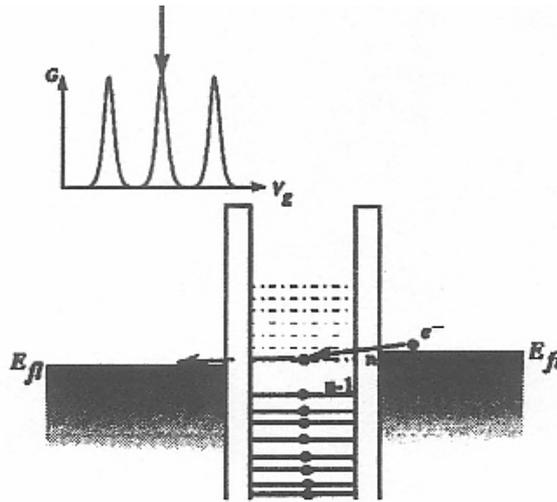


Fig.2.17 Schematizzazione della condizione per un picco di conduttanza in una struttura a doppia barriera con dot a semiconduttore. Si noti che in questo caso gli stati discreti coesistono con la gap di energia coulombiana.[9]

Per lo stato fondamentale di un dot a semiconduttore contenente n elettroni si può scrivere l'energia totale come somma delle energie degli elettroni presenti negli stati occupati più l'energia elettrostatica dovuta all'occupazione del dot da parte degli stessi elettroni:

$$E_t(n) = \sum_{i=1}^n E_i + E(n_1, n_2) \quad (2.46)$$

dove E_i rappresentano le energie dei singoli elettroni del quantum dot, e $E(n_1, n_2) = E_S - L_S$ è la *energy charging* totale del sistema dovuta al tunnelling attraverso le due barriere (E_S ed L_S sono date rispettivamente dalle (2.37) e (2.39)-(2.38)). Si definirà, inoltre, il potenziale elettrochimico del dot come $\mu_d(n) = E_t(n) - E_t(n-1)$, cioè la differenza in energia associata con la rimozione di un elettrone dal dot. Quando la V_a sia sufficientemente piccola la *charging energy* del sistema non dipende dalla barriera attraverso cui l'elettrone opera il tunnelling. In questo caso, utilizzando (2.40) e (2.41), la variazione in *charging energy* dallo stato di carica n a quello $n-1$ ($n \rightarrow n-1$) è

$$\mu_d(n) = E_n + \frac{e^2(n - \frac{1}{2})}{C_{eq}} - e \frac{C_g V_g'}{C_{eq}} \quad (2.47)$$

dove E_n rappresenta l'energia dello stato più alto occupato (a $T = 0$). Per un dato valore di V_g' , il tunnelling può avvenire se il potenziale chimico μ_d , corrispondente all'aggiunta di un elettrone al dot con $n-1$ elettroni, si trova tra μ_l (potenziale chimico dell'elettrodo di sinistra) e μ_r (potenziale chimico dell'elettrodo di destra). In questo caso il sistema passa alternativamente attraverso gli stati di carica $n-1 \rightarrow n \rightarrow n-1$ e conduce corrente (situazione per cui si ottengono i picchi di conduttanza). Un aumento di V_g rende stabile lo stato di carica n cosicché il dot esce dalla risonanza e la conduttanza del sistema va a zero almeno finché il livello $\mu_d(n+1)$ non si ritrovi nuovamente tra le energie di Fermi degli elettrodi (in questo caso appare un nuovo picco di conduttanza). Dalla (2.47) si può dedurre che la distanza tra due picchi successivi di conduttanza è

$$\Delta V_g = \frac{C_{eq}}{C_g} \left(\frac{E_{n+1} - E_n}{e} \right) + \frac{e}{C_g} \quad (2.48).$$

Rispetto ai picchi di conduttanza che si ottengono per un dot metallico (figura 2.15) che hanno spaziatura $\Delta V_g = e/C_{eq}$, in questo caso del dot a semiconduttore a tale spaziatura si aggiunge il contributo dovuto alla distanza energetica tra i livelli n ed $n+1$ del sistema (come illustrato in figura 2.17).

In un dot metallico, la massa efficace dell'elettrone e l'energia di Fermi sono così grandi che la spaziatura tra i suoi livelli energetici è dell'ordine di μeV . Allora, per un tale sistema, la spaziatura quantizzata tra i livelli è trascurabile ed il periodo in V_g è sempre e/C_g . In un quantum dot a semiconduttore, la spaziatura energetica tra i livelli del dot può essere comparabile o anche maggiore del contributo coulombiano.

I primi dati sperimentali di effetti di elettrone singolo in strutture a semiconduttore furono ottenuti da Scott-Thomas *et al.*[77]: osservarono

oscillazioni di conduttanza in funzione del potenziale di gate nella caratteristica I-V (a bassa temperatura) di un MOSFET al Si. La dimostrazione sperimentale definitiva di tali effetti fu data da Meirav *et al.* utilizzando *quantum point contact* per definire le barriere di entrata e di uscita di una struttura dot a doppia giunzione del tipo mostrata in figura 2.18.

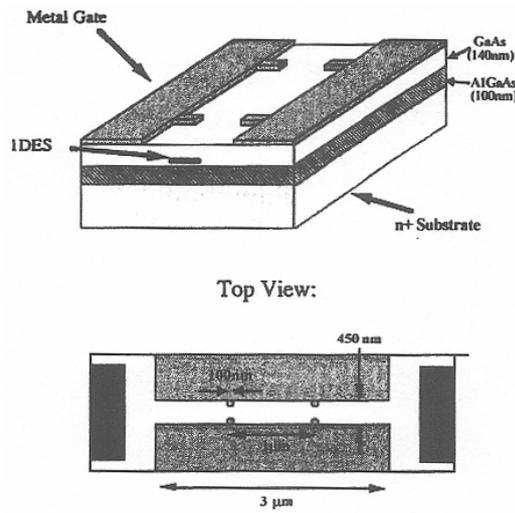


Fig.2.18 Schematizzazione di un sistema dot a semiconduttore a doppia giunzione per mettere in evidenza effetti di elettrone singolo.[9]

La figura 2.19 mostra delle misure sperimentali su un tale sistema (conduttanza in funzione del potenziale di gate) per due diverse lunghezze del campione:

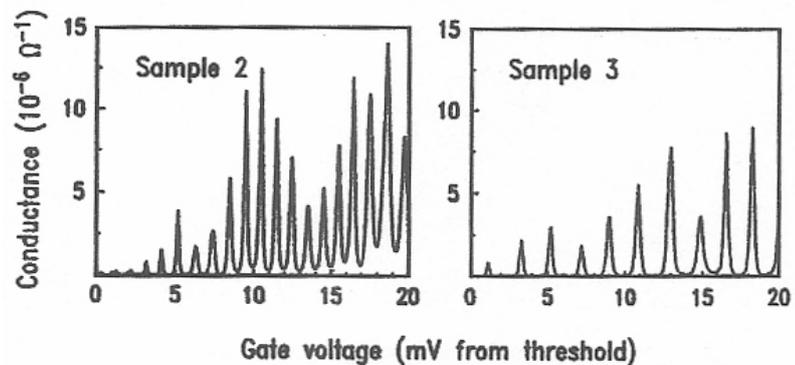


Fig.2.19 Conduttanza in funzione di V_g per due campioni del tipo mostrato in figura 2.18 ma con diverse lunghezze. Il campione indicato con 2 ha lunghezza $L_0 = 0.8 \mu\text{m}$, quello indicato con 3 $L_0 = 0.6 \mu\text{m}$. Si può osservare che il periodo di oscillazione aumenta con l'inverso di L_0 . [9]

Sebbene le oscillazioni di G in funzione di V_g si possano spiegare in termini della teoria sviluppata per un dot metallico in una struttura SET, altrettanto non si può dire per la modulazione casuale dell'altezza dei picchi. Questa modulazione nasce dalla natura discreta dei livelli energetici del dot a semiconduttore (in contrasto con la natura quasi continua di quelli di un dot metallico).

All'aumentare della temperatura del sistema, la larghezza dei picchi e delle valli aumenta come mostrato in figura 2.20:

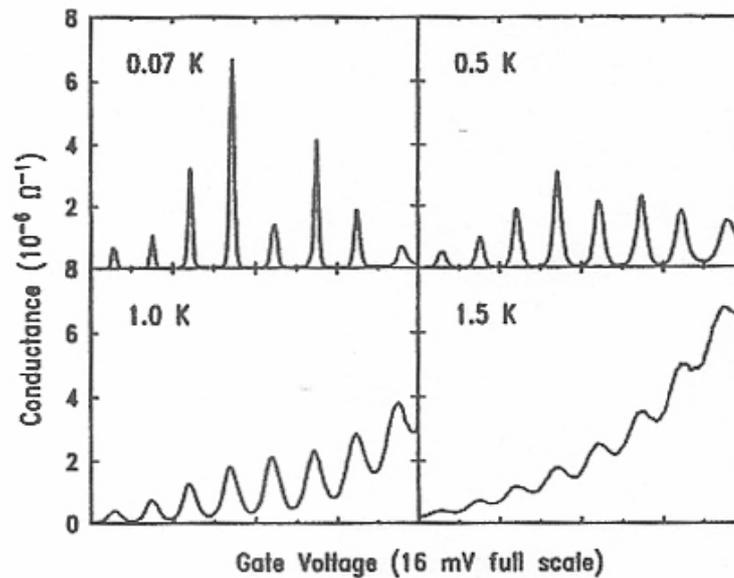


Fig.2.20 Oscillazioni di conduttanza a varie temperature del sistema di figura 2.18.[9]

Si può osservare che la dipendenza dalla temperatura non è uniforme per tutti i picchi: questo fatto si può attribuire al ruolo degli stati discreti e della loro coesistenza con i fenomeni coulombiani in queste strutture a semiconduttore.

2.4 ACCENNO ALLE APPLICAZIONI DEI QUANTUM DOTS

Le prospettive di applicazione dei quantum dots sono innumerevoli e nel loro insieme costituiscono una nuova branca della fisica: la *nanoelettronica*.

Le applicazioni tecnologiche di sistemi di molti quantum dots sono essenzialmente di due tipi: applicazioni analogiche ed applicazioni digitali.

Applicazioni analogiche: ad oggi sono queste le applicazioni che hanno dato i maggiori frutti dal punto di vista pratico. Tali applicazioni sono innumerevoli ed hanno portato alla realizzazione di tutta una serie di dispositivi a singolo elettrone che stanno assumendo una importanza fondamentale nel campo della ricerca tecnologica e scientifica in generale.

Tra questi innumerevoli dispositivi si citano: il *single electron turnstile*[9, 20, 21] e il *single electron pump*[9, 20, 21] (dispositivi capaci di “cronometrare” gli elettroni, ad uno ad uno, attraverso una serie di giunzioni tunnel), *elettrometri supersensibili*[20, 21] (elettrometri capaci di apprezzare cariche dell'ordine di $10^{-4} \div 10^{-5}$ e), dispositivi di *analisi spettroscopica*[20, 21] e di *rivelazione di radiazione infrarossa*[20, 21], e molti altri.

Applicazioni digitali: le applicazioni digitali dei quantum dots sono fondamentalmente due: *memorie a quantum dots* e *quantum computing*[20, 21].

Questi due campi sono, oggi, approfonditamente sviluppati dal punto di vista teorico ma ancora ben lontani da applicazioni sperimentali. Ciò è dovuto al fatto che nella realizzazione sperimentale di memorie a quantum dots e di quantum computers si incorre in notevoli difficoltà tecniche, prime fra tutte la necessità di rendere tali sistemi insensibili al disordine (fondamentalmente le cariche parassite) inevitabilmente presente nei sistemi di multi quantum dots (o almeno di limitarne gli effetti) e la necessità di rendere tali sistemi operanti a temperatura ambiente.

È questo il motivo pratico che impone una dettagliata conoscenza teorica degli effetti del disordine e della temperatura sulle proprietà fisiche dei

sistemi di nanocristalli. I prossimi due capitoli sono, appunto, volti all'analisi di questi problemi, sia dal punto di vista teorico che sperimentale, in particolare in sistemi di nanocristalli metallici.

2.5 CONCLUSIONI

In questo capitolo si è voluta dare una introduzione generale agli effetti di elettrone singolo, facendo in particolare riferimento ai dispositivi concettualmente più semplici in cui essi hanno luogo: sistemi costituiti da uno o pochissimi dots. La linea di studio qui seguita è stata impostata sulla presentazione dei dati sperimentali, riguardanti il trasporto elettrico, tipici di tali sistemi per poi introdurre delle semplici spiegazioni teoriche degli effetti fisici alla base di tali dati. Si vuole far osservare che i ragionamenti svolti nei paragrafi 2.3.7, 2.3.8, 2.3.9, per giustificare i fenomeni di Coulomb blockade, Coulomb staircase, Coulomb oscillations, sono stati svolti facendo riferimento a delle particolari rappresentazioni circuitali dei sistemi in esame e ragionando con concetti del tutto classici quali resistenze e capacità. Questa linea di esposizione è stata seguita puramente per una questione di semplicità e chiarezza nell'introduzione di fenomeni sconosciuti alla fisica classica. Da questo punto di vista si vuole sottolineare come sia possibile derivare tali fenomeni e le loro caratteristiche ricorrendo ad una più generale descrizione basata sul formalismo quantistico unito a quello del tunnelling transport esposto nel capitolo I [appendice A].

Si vuole, infine, ribadire l'importanza dello studio di sistemi che presentino effetti di singolo elettrone per la ricerca scientifica e tecnologica. Soprattutto dal punto di vista dello sviluppo tecnologico nasce la necessità di capire il comportamento di sistemi di moltissimi dots che siano integrabili in vari dispositivi a stato solido. È ovvio capire che, nonostante i sistemi di molti dots presentino fenomeni di base analoghi a quelli dei semplici sistemi studiati in questo capitolo, per essi si presentino tutta una serie di altre

difficoltà di studio legate alle interazioni reciproche tra i dots del sistema. In questo ambito diviene, inoltre, fondamentale lo studio relativo a come il disordine strutturale presente nel sistema influisca sulle proprietà di trasporto dello stesso (esso è la causa principale che pone limiti assai ristretti all'integrazione di questi sistemi nei dispositivi a stato solido). Lo scopo dei prossimi due capitoli è quello di dare una introduzione verso questi tipi di studi.

CAPITOLO III

PROPRIETA' DI TRASPORTO ELETTRONICO IN SISTEMI DISORDINATI DI NANOCRISTALI METALLICI, TEORIA E DATI SPERIMENTALI

3.1 INTRODUZIONE

Nel capitolo II si sono studiate le proprietà di trasporto elettronico attraverso sistemi costituiti da un unico dot o da un numero molto limitato di dots (poche centinaia). Partendo dai concetti ivi sviluppati ed utilizzando i concetti di trasporto tunnel sviluppati nel capitolo I, nella sezione 3.2 di questo capitolo si vogliono illustrare i modelli teorici per il trasporto elettronico in sistemi di molti dots metallici (densità di stati quasi continua). In particolare si vuole illustrare come nella trattazione teorica di questo argomento si possa introdurre l'effetto del *disordine* (impurità, difetti, *temperatura*) sul trasporto tunnel degli elettroni attraverso detti sistemi di molti nanocristalli metallici (effetti volutamente trascurati nel capitolo I). Le teorie qui esposte valgono per sistemi costituiti da dots intesi nella più generalità della loro accezione, ma, in virtù dei particolari dati sperimentali che saranno esposti nel prossimo capitolo, si può guardare qui ad un dot

metallico, senza perdere di generalità, come ad un grano metallico delle dimensioni di qualche nanometro.

Nella sezione 3.3 del presente capitolo si descrive il prototipo di esperimento relativo alla caratterizzazione elettrica di sistemi di nanocristalli metallici presente in letteratura e l'interpretazione dei dati così ottenuti secondo i modelli teorici esposti nella sezione 3.2. Questa sezione viene riportata da un lato per illustrare i tipici approcci sperimentali allo studio dei sistemi suddetti e dall'altra per poter operare un confronto tra questi tipici dati presenti in letteratura e quelli originali da noi ricavati ed analizzati nel quarto capitolo. Si osservi che gli esperimenti descritti in suddetta sezione sono riportati puramente come significativi esempi in cui ha trovato ottima applicazione la teoria esposta nel capitolo III. In quanto esempi tali esperimenti sono descritti, per brevità, nelle loro parti essenziali e ci si è soffermati su alcuni punti ritenuti più significativi in funzione di quanto viene esposto nel capitolo IV. Per le descrizioni complete degli esperimenti e per utili ulteriori approfondimenti si rimanda ai riferimenti bibliografici da cui le stesse descrizioni qui riportate sono state tratte.

3.2 TEORIA

3.2.1 TUNNELLING E COULOMB BLOCKADE IN SISTEMI DI MOLTI DOTS

Come già detto nel capitolo precedente, i fenomeni di tunnelling di elettroni e Coulomb blockade dovuti alla repulsione coulombiana furono inizialmente osservati in sistemi granulari di materiali metallici e poi in sistemi di eterostrutture. Con l'affinamento delle tecniche di fabbricazione (litografia, MBE) e di indagine, esperimenti sempre più indicativi degli effetti di

elettrone singolo sono stati effettuati, durante gli anni, su tali sistemi. Parallelamente sono stati sviluppati tutta una serie di modelli teorici di trasporto elettronico attraverso simili sistemi per spiegare i dati sperimentali di cui sopra. Come già detto, dettagliati studi teorici sul Coulomb blockade in giunzioni tunnel metalliche sono stati effettuati da Averin, Likharev, Korotkov, Mullen. Altri interessanti studi in questo senso sono stati condotti da Meir *et al.*[78, 79] utilizzando in particolare modelli microscopici basati sul formalismo esposto nel capitolo I ed in particolare sulla formula di Landauer, con risultati molto interessanti nel regime di bassa temperatura. Beenakker utilizzando un approccio semiclassico giunse alle stesse conclusioni di Meir per la conduttanza di tali sistemi[80]. Korotkov studiò le proprietà di sistemi di multi quantum dots in presenza di un forte accoppiamento tra gli stessi dots[22].

Il merito indubbio di questi lavori è quello di aver spostato in modo determinante il campo di studi teorici dal trasporto elettronico in sistemi di uno o pochi dots a sistemi di molti dots; essi, però, mantengono ancora il difetto fondamentale di trascurare l'effetto del disordine. Solo nel 1993 il modello sviluppato da Middleton e Wingreen[24] è riuscito, almeno in parte, ad includere in modo realistico e semplice l'effetto del disordine sul trasporto elettronico in sistemi di nanocristalli metallici. Gran parte del lavoro teorico e sperimentale odierno è volto alla comprensione quanto più realistica possibile di come gli elettroni vengano trasportati in simili sistemi e come i vari tipi di disordine e la temperatura influiscano su questo trasporto. L'importanza di questi studi è di fondamentale importanza per lo sviluppo di tutto quel campo che va sotto il nome di *nanoelettronica* compreso il campo della *quantum computing*.

Nel seguito si procederà innanzitutto a dare un accenno dello studio sull'interazione tra più dots per poi illustrare in modo dettagliato il modello di Middleton e Wingreen per il trasporto di elettroni in sistemi di nanocristalli metallici in presenza di disordine nel regime di basse temperature ed illustrare infine le correzioni apportate a tale modello da Parthasarathy *et al.*[27, 32] per generalizzarlo al caso di temperatura generica.

3.2.2 INTERAZIONE TRA GLI ELETTRONI DI DOTS COSTITUENTI SISTEMI UNI- E BI- DIMENSIONALI

La questione che nasce subito dopo lo studio di singoli dots ed isole metalliche è quella di analizzare le caratteristiche di trasporto elettronico in sistemi 1D e 2D di “arrays” di dots metallici. Un tale problema diviene di notevole interesse se l’interazione tra gli elettroni dei dots costituenti il sistema non è trascurabile. I prossimi due paragrafi sono diretti alla comprensione della natura di questa interazione.

3.2.2.a SISTEMI UNIDIMENSIONALI DI DOTS

La maggior parte degli studi sperimentali su sistemi unidimensionali costituiti da ultrapiccole giunzioni tunnel sono stati effettuati da Delsing *et al.* [83].

In figura 3.1 è riportata la schematizzazione circuitale di un tale sistema nelle condizioni ideali di assenza di disordine e di sistema infinito: i dots metallici sono semplicemente rappresentati, in questa analisi, come dei puri conduttori capacitivamente accoppiati tra di essi.



Fig.3.1 Schematizzazione circuitale di un sistema 1D idealmente infinito di dots metallici puramente trattati come conduttori capacitivamente accoppiati .

Si supponga, per semplicità, che il sistema unidimensionale suddetto sia infinito. Allora, utilizzando semplicemente una teoria circuitale, si può mostrare che il potenziale ϕ_i su ogni dot i del sistema quando su un dot k del sistema vi sia un elettrone in eccesso rispetto alla situazione di neutralità, è dato da

$$\phi_i = -\frac{e}{C_{eff}} \left(\frac{C}{C + C_0} \right)^{|i-k|} \quad (3.1)$$

essendo C_0 la capacità del singolo dot (considerata eguale per tutti i dots del sistema), C la capacità di accoppiamento tra dots primi vicini (considerata eguale per ogni coppia di dots primi vicini). Si noti che in questo calcolo sono state trascurate rispetto a C le capacità di accoppiamento tra secondi e successivi dots vicini. C_{eff} risulta definita da

$$C_{eff} = \sqrt{(C_0^2 + 4CC_0)} \quad (3.2).$$

In genere sperimentalmente si realizza la condizione per cui $C_0 \ll C$, cosicché $C_{eff} \approx \sqrt{4CC_0}$. Il potenziale così determinato decade come mostrato in figura 3.2.

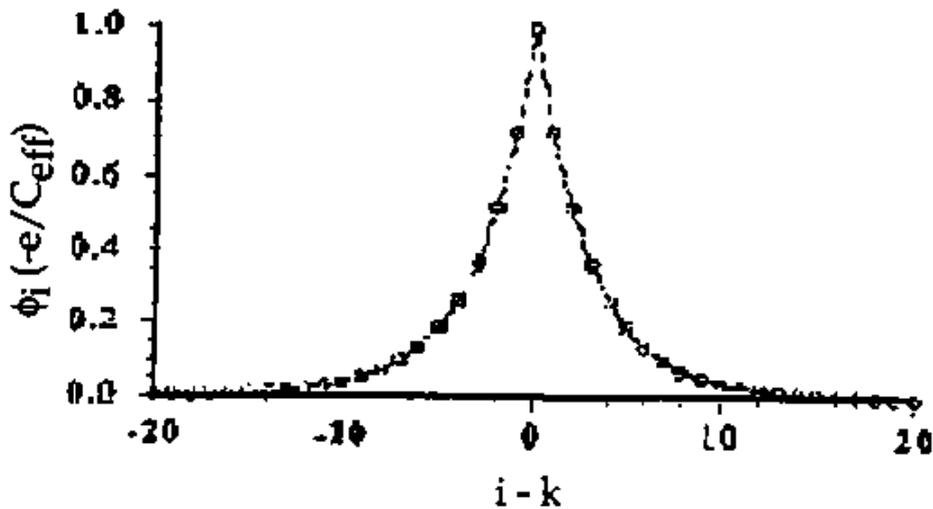


Fig.3.2 Distribuzione di potenziale determinata da un elettrone in eccesso su un dot k in un sistema 1D infinito.[25]

Se un elettrone opera tunnelling dal dot k al dot $k\pm 1$, questa distribuzione di potenziale traslerà rigidamente in modo da essere piccata sul dot verso cui l'elettrone ha operato il tunnelling. Dunque questa distribuzione di potenziale assume le caratteristiche di un "solitone". Una carica positiva in eccesso con la sua corrispondente distribuzione di potenziale verrà detta un "antisolitone". Le proprietà di conduzione di sistemi di dots in termini di propagazione di coppie "solitone-antisolitone" sono state approfonditamente indagate da Tighe *et al.* [82], Mooiji *et al.*[68].

Qui ci si limita ad osservare che si può dedurre che il solitone si estende per un numero di dots approssimativamente pari a $2M$, essendo

$$M^{-1} = \ln \left(\frac{C_{eff} + C_0}{C_{eff} - C_0} \right) \quad (3.3)$$

($M \approx (CC_0)^{1/2}$ quando $C_0 \ll C$), e che la sua energia E_S è

$$E_S = \frac{e^2}{2C_{eff}} \quad (3.4).$$

Come si vedrà nel capitolo seguente, la caratteristica sperimentale I-V di un siffatto sistema presenta un offset di potenziale, V_t , che è tipico di un fenomeno di Coulomb blockade[83]. Inoltre gli stessi dati sperimentali mostrano che V_t dipende linearmente dalle dimensioni del sistema. Questi fatti avranno una chiara interpretazione nell'ambito del modello di Middleton e Wingreen.

3.2.2.b SISTEMI BIDIMENSIONALI DI DOTS

Sistemi bidimensionali di isole metalliche sono stati studiati in modo approfondito sia teoricamente che sperimentalmente. I primi studi sperimentali su tali tipologie di sistemi sono stati effettuati da Geerlings e Mooij[86].

La schematizzazione circuitale di questo sistema, idealmente infinito, è data in figura 3.3: come nel paragrafo precedente i dots sono considerati equivalenti a conduttori capacitivamente accoppiati tra di essi, essendo C_0 la capacità del singolo dot (tutti i dots del sistema si suppongono avere la stessa capacità) e C la capacità di accoppiamento tra due dots primi vicini (si considera la stessa per ogni coppia di dots primi vicini).

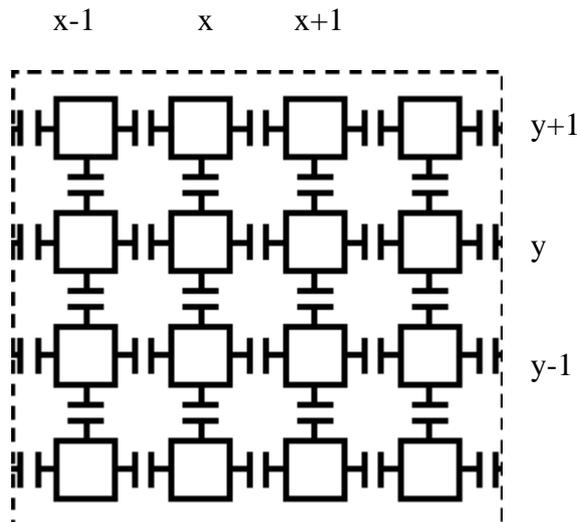


Fig.3.3 Schematizzazione circuitale di un sistema infinito 2D di dots metallici trattati come conduttori tra di essi capacitivamente accoppiati.[24]

Detta C_{ij} la matrice delle capacità di accoppiamento tra i dots del sistema, l'energia totale di interazione elettrostatica tra gli stessi dots del sistema può essere espressa come

$$E_{in} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_i C_{ij}^{-1} Q_j \quad (3.5)$$

essendo Q_i la carica totale sul dot i . Ovviamente tale carica può essere solo un multiplo intero della carica elettronica unitaria e . Per semplificare l'analisi si supponga che tutte le capacità coinvolte dal sistema siano trascurabili rispetto a C_0 e C (anche per questo caso si realizza sperimentalmente in genere la situazione $C_0 \ll C$). Utilizzando questa ipotesi, per il sistema in esame può essere scritta la seguente equazione discreta di Poisson:

$$Q(x, y) = C_0\phi(x, y) + C[4\phi(x, y) - \phi(x-1, y) - \phi(x+1, y) - \phi(x, y-1) - \phi(x, y+1)] \quad (3.6)$$

dove con $\phi(x,y)$ si è indicato il potenziale generato dal sistema nel punto (x,y) . Passando al limite continuo definito dalla condizione

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \gg 1 \quad (3.7)$$

si può ottenere la seguente equazione per $\phi(r)$ [81]:

$$\nabla^2\phi(r) - \Lambda^2\phi(r) = 0 \quad (3.8).$$

In questa equazione Λ rappresenta una opportuna lunghezza di schermaggio definita da

$$\Lambda = \left(\frac{C}{C_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

in unità di costante reticolare del sistema.

La soluzione generale della (3.8) è

$$\phi(r) = AK_0\left(\frac{r}{\Lambda}\right) \quad (3.10)$$

con A una costante e $K_0\left(\frac{r}{\Lambda}\right)$ la funzione di Bessel modificata di ordine zero e argomento r/Λ ⁽³⁾. Dalla legge di Gauss si determina $A = \frac{e}{2\pi C}$.

Nel caso particolare in cui sia $r \ll \Lambda$ si può porre $K_0\left(\frac{r}{\Lambda}\right) \approx -\ln\left(\frac{r}{\Lambda}\right)$ ottenendo, così, per la forma di $\phi(r)$ l'espressione:

$$\phi(r) = -\frac{e}{2\pi C} \ln \frac{r}{\Lambda} \quad \text{con } 1 < r \ll \Lambda \quad (3.11).$$

Questa energia di interazione logaritmica è tipica di una coppia di cariche opposte facente parte di un "gas bidimensionale". Quando la temperatura del sistema venga aumentata vengono generate sempre più coppie con separazione tra le singole cariche della coppia sempre maggiore. Non appena si generi una coppia le cui cariche abbiano distanza infinita (molto grande) la conduttanza del sistema diviene finita. Ciò corrisponde ad una temperatura di transizione T_t (per $T \leq T_t$ la conduttanza del sistema è praticamente nulla e per $T \geq T_t$ acquista valori non nulli), ed in corrispondenza ad essa la densità di portatori liberi del sistema si può mostrare seguire la legge

$$n(T) = K \exp \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{\frac{T}{T_t} - 1}} \right] \quad (3.12)$$

essendo α e K costanti opportune determinate dalle condizioni al contorno. Questo risultato è importante per la nostra analisi in quanto la legge (3.12) caratterizza una cosiddetta *transizione di fase di Kosterlitz-Thouless-Berezinskii(KTB)*[70] che si manifesta in una tensione di soglia per la conduzione del sistema, obbedendo la caratteristica corrente- tensione dello stesso ad una legge del tipo:

$$I \propto (V - V_t)^\beta \quad (3.13)$$

con β un opportuno esponente. Il comportamento descritto da questa legge viene spesso detto "scaling behavior".

3.2.3 TRASPORTO COLLETTIVO IN "ARRAYS" DI PICCOLI DOTS METALLICI: MODELLO DI MIDDLETON E WINGREEN[24]

Nei paragrafi precedenti si è voluta analizzare l'origine e la forma dell'interazione che intercorre tra i dots costituenti sistemi uni- e bi-dimensionali in assenza di disordine (per sistemi tridimensionali valgono analoghe considerazioni qualitative ma l'analisi formale diviene molto più complessa). Si vuole, ora, qui illustrare nel dettaglio un modello (dovuto ad A. Alan Middleton e Ned S. Wingreen) di trasporto elettronico collettivo in sistemi 1D e 2D di nanocristalli metallici con il pregio di riuscire ad includere nella trattazione, per la prima volta, in modo semplice e realistico, fonti di disordine inevitabilmente presenti nei sistemi reali. Data questa caratteristica del modello, esso risulta più realistico dei modelli precedentemente proposti per la spiegazione dei dati sperimentali relativi ai sistemi in esame: esso, infatti, riesce, almeno a basse temperature, a prevedere ed interpretare le caratteristiche sperimentali I-V dei suddetti sistemi.

Dunque si procede in questo paragrafo allo studio del trasporto collettivo di carica in sistemi uni- e bi- dimensionali di ultrapiccoli dots metallici (non superconduttori) separati da barriere tunnel (una tipica realizzazione sperimentale è rappresentata da grani metallici di dimensioni di qualche nm

depositati su un substrato isolante). In particolare si esaminano le caratteristiche di questi sistemi a bassa temperatura (quando l'energia termica del sistema sia sensibilmente minore dell'energia di carica dei dots). Si inizi con il considerare la schematizzazione di un sistema, ad esempio bidimensionale, in esame come data in figura 3.4: esso non è altro che un "array" (sistema strutturalmente ordinato) di dots metallici trattati come conduttori capacitivamente accoppiati tra di essi, con due elettrodi (R,L) e con un terzo elettrodo di gate (g). Agli elettroni è permesso di operare tunnelling tra gli stessi dots del sistema e tra gli elettrodi ed i dots.

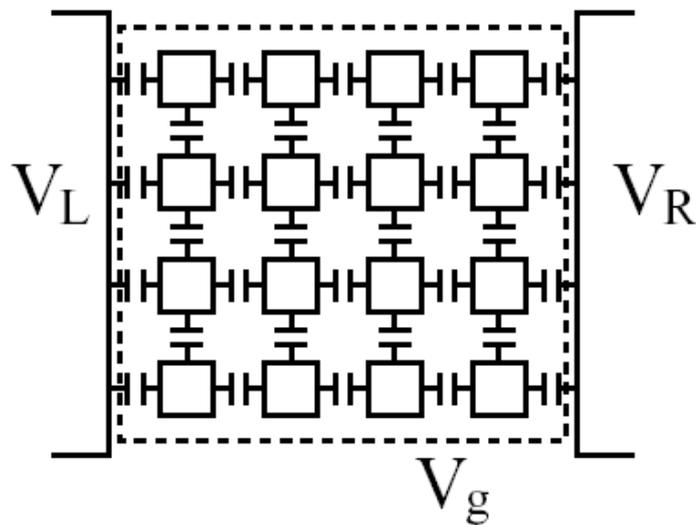


Fig.3.4 Sistema strutturalmente ordinato di dots metallici, connesso a due elettrodi e ad un gate. Si suppone che l'interazione tra gli stessi dots, tra dots ed elettrodi sia completamente contenuta negli accoppiamenti capacitivi indicati. V_L , V_R , V_g sono rispettivamente i potenziali applicati dall'esterno all'elettrodo di sinistra, a quello di destra e a quello di gate.[24]

La presenza del gate non è necessaria ma viene inclusa per una maggiore generalità di trattazione. Sperimentalmente si possono effettuare due tipi di misure:

a) Variare V_L e V_R tenendo fisso V_g : in tal caso si ottiene una misura di Coulomb blockade per la caratteristica I-V del sistema.

b) Variare V_g tenendo fissi V_L e V_R . in tal caso si ottiene una misura di Coulomb oscillations per la conduttanza del sistema.

Sia R la resistenza di tunnelling (resistenza incontrata da un elettrone nell'attraversare una barriera di potenziale per andare da un dot all'altro). Nel sistema di figura 3.4 si suppone che tale resistenza sia eguale per ogni coppia di dots primi vicini.

Sia C la capacità di accoppiamento tra due dots primi vicini; anch'essa si suppone costante per ogni coppia di dots primi vicini.

Sia C_g la capacità di accoppiamento tra un generico dot del sistema ed il gate, supposta costante per ogni dot del sistema.

Sia C_{ij} la matrice i cui elementi sono tutte le capacità di accoppiamento tra i dots del sistema (ovviamente C sono elementi di tale matrice).

Gli elettrodi ed il gate si suppongono possedere capacità proprie C_L e C_R molto grandi rispetto a tutte le altre coinvolte. Eventuali altre capacità presenti nel sistema si suppongono essere trascurabili rispetto alle suddette.

Nel caso in cui venga a mancare l'accoppiamento di gate si può mostrare che tutte le formule che verranno nel seguito ricavate continuano formalmente ad essere valide sostituendo C_g con C_0 , essendo questa ultima la capacità propria del singolo dot (supponendo i dots tutti identici essa sarà per tutti la stessa ed in prima approssimazione si potrà ritenere eguale a quella di un conduttore sferico immerso in un dielettrico di costante dielettrica relativa ϵ_r , $C_0 = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r r$, con r il raggio della stessa sfera). Le distanze verranno misurate in unità della costante reticolare del sistema della figura precedente.

Le ipotesi che stanno alla base del modello di Middleton e Wingreen di un sistema così considerato (sia 1D che 2D) sono di seguito riassunte:

1) innanzitutto, si richiede che ogni stato di carica del sistema possa essere pienamente descritto dal numero di elettroni in ogni dot. Questo impone che le barriere tunnel siano sufficientemente opache da permettere di affermare con alta probabilità che ad un certo istante di tempo un determinato elettrone si trovi in un determinato dot del sistema. Si può giungere al risultato che

tale ipotesi sia sicuramente verificata allorquando la resistenza di tunnelling delle suddette barriere sia molto più grande del quanto di resistenza:

$$R \gg \frac{h}{e^2} \quad (3.14).$$

2) Si studia il regime di Coulomb blockade, caratterizzato dalla condizione

$$k_B T \ll \frac{e^2}{2 \max(C, C_g)} \quad (3.15)$$

per cui, cioè, l'energia termica del sistema è molto minore dell'energia massima di carica elettrostatica del singolo dot.

La giustificazione di questa ipotesi sta nel seguente fatto: gli elettroni possono operare tunnelling tra i dots quando abbiano energia opportuna. Tale energia può essere acquisita dai suddetti elettroni o come energia termica o come energia elettrostatica conseguente all'applicazione della d.d.p. esterna. Poiché si vuole studiare come il sistema reagisce all'applicazione di d.d.p. si deve richiedere che la probabilità di tunnelling termico sia molto minore della probabilità di tunnelling coulombiano, e questo viene assicurato dalla condizione (3.15).

3) La fonte principale di disordine presente in un sistema del tipo studiato è un **disordine locale strutturale** classificabile fondamentalmente come segue:

- a) **difetti di punto** (nella schematizzazione di figura 3.4: presenza di siti vuoti, **presenza di cariche parassite**,.....);
- b) dispersione nelle dimensioni dei dots e nelle loro distanze (che si traduce in una variazione della costante di accoppiamento tra i dots).

In questa analisi il disordine viene introdotto facendo riferimento essenzialmente alla fonte di disordine spesso più pesante, costituita dalla

presenza di cariche parassite nel sistema. L'ipotesi fondamentale attraverso cui viene introdotta tale fonte di disordine è la seguente:

il disordine viene incluso in questa analisi attraverso una carica di offset q_i che rappresenta la carica effettiva indotta in ogni dot dalle impurità cariche casualmente disperse nel sistema.

Partendo da queste ipotesi si può mostrare che l'energia elettrostatica totale E del sistema in esame è esprimibile da

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (Q_i + q_i) C_{ij}^{-1} (Q_j + q_j) + V_L Q_L + V_R Q_R + \sum_i V_i^{ext} Q_i \quad (3.16)$$

avendo indicato:

Q_i : la carica immagazzinata, rispetto alla configurazione di neutralità, dai dot i del sistema a causa dell'effetto degli elettrodi;

$Q_{L,R}$: la carica immagazzinata rispettivamente dagli elettrodi L ed R;

$V_i^{ext} = \sum_x C_x \sum_{j,x} C_{ij}^{-1} V_x$, con $x = L, R, g$, il potenziale sul dot i dovuto agli

effetti degli elettrodi L, R e del gate g .

È intuitivo capire che:

$\frac{1}{2} \sum_{i,j} (Q_i + q_i) C_{ij}^{-1} (Q_j + q_j)$ rappresenta l'energia di interazione elettrostatica

tra tutti i dots del sistema, in presenza del disordine introdotto come specificato dall'ipotesi di cui sopra;

$V_L Q_L$, $V_R Q_R$ rappresentano rispettivamente l'energia elettrostatica immagazzinata nell'elettrodo L ed in quello R;

$\sum_i V_i^{ext} Q_i$ rappresenta l'energia di interazione elettrostatica tra tutti i dots del sistema e gli elettrodi L, R e l'elettrodo di gate.

Si può inoltre mostrare che gli elementi della matrice C_{ij}^{-1} decrescono esponenzialmente con una *lunghezza di shermaggio* Λ definita, per $C \gg C_g$, come è il caso sperimentale usuale, dalla (3.9).

A $T \rightarrow 0$, un elettrone può operare tunnelling tra due dots solo se un tale evento comporta un abbassamento dell'energia elettrostatica totale del sistema. In questa condizione la rate di tunnelling da una configurazione $S = (\dots, Q_i, \dots, Q_j, \dots)$ ad un'altra $S' = (\dots, Q_{i-1}, \dots, Q_{j+1}, \dots)$ del sistema, dove i e j indicano due dots o un dot ed un elettrodo, è data da:

$$\Gamma_{S \rightarrow S'} = (e^2 R)^{-1} \theta^{(4)}(E(S) - E(S')) [E(S) - E(S')] \quad (3.17)$$

essendo $E(S)$ l'energia totale elettrostatica del sistema relativa alla configurazione S ed $E(S')$ quella relativa alla configurazione S' . Questa rate cresce linearmente con la perdita di energia elettronica poiché il numero di elettroni capaci di operare tunnelling è proporzionale allo shift relativo della superficie di Fermi nei dots. Per sistemi di un numero non molto grande di dots i risultati numerici ottenuti con la (3.17) sono in ottimo accordo con i dati sperimentali[83].

Si consideri il sistema di figura 3.4, formato da un numero arbitrario di dots e descritto dalla (3.16) e sia $V = V_L - V_R$ la d.d.p. applicata tra i due elettrodi. Per basse temperature (nel limite definito dalla (3.15)), partendo appunto dalla (3.16) si può mostrare il seguente notevole risultato:

esiste un opportuno valore di V , che verrà detto *potenziale di soglia* V_t , in

corrispondenza del quale $\left. \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right|_{V=V_t} = 0$.

Questa condizione definisce per il sistema una *transizione di fase del secondo ordine*, controllata dal parametro V , che separa una fase statica non conduttiva da una dinamica conduttiva. In particolare:

$V < V_t$: il sistema si trova nello stato non conduttivo, per cui esso non può essere attraversato da elettroni da un elettrodo all'altro (il sistema ha conducibilità praticamente nulla).

$V \geq V_t$: il sistema entra nello stato conduttivo, per cui esso può essere attraversato da elettroni da un elettrodo all'altro (il sistema acquista conducibilità finita).

Un tale comportamento del sistema può essere interpretato per mezzo di una dinamica di Coulomb blockade per il trasporto collettivo degli elettroni attraverso il sistema, come verrà specificato nel seguito.

Una importante osservazione da fare a questo punto è la seguente.

La corrente che attraversa il sistema può dipendere dalla “storia” della d.d.p. applicata nel senso che essa può essere influenzata dagli effetti che le d.d.p. precedentemente applicate al sistema hanno generato nello stesso. Questo fatto, di conseguenza, può dar luogo, nelle caratteristiche I-V del sistema a complessi fenomeni di isteresi. Sebbene tali fenomeni siano oggetto di interessanti studi sia teorici che sperimentali[67], vengono in questa trattazione trascurati. Anzi è possibile mostrare che questi effetti non si presentano nel cosiddetto regime di “short screening length” definito dalla condizione

$$\Lambda = \left(\frac{C}{C_g} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad (3.18).$$

Dunque, tutte le considerazioni che verranno fatte nel seguito saranno valide nel regime definito dalla (3.18).

Numericamente è possibile determinare la dipendenza di V_t da $\frac{C}{C_g}$ e dalle dimensioni lineari N del sistema; si trova (per $V_g = 0$) che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{V}_t(N) \frac{C_g}{Ne} = \alpha \left(\frac{C}{C_g} \right) \quad (3.19)$$

avendo indicato con \bar{V}_t la media di V_t rispetto al disordine e con $\alpha(C/C_g)$ una opportuna funzione. La figura 3.5 mostra la funzione $\alpha(C/C_g)$ per un sistema unidimensionale e per Λ generico:

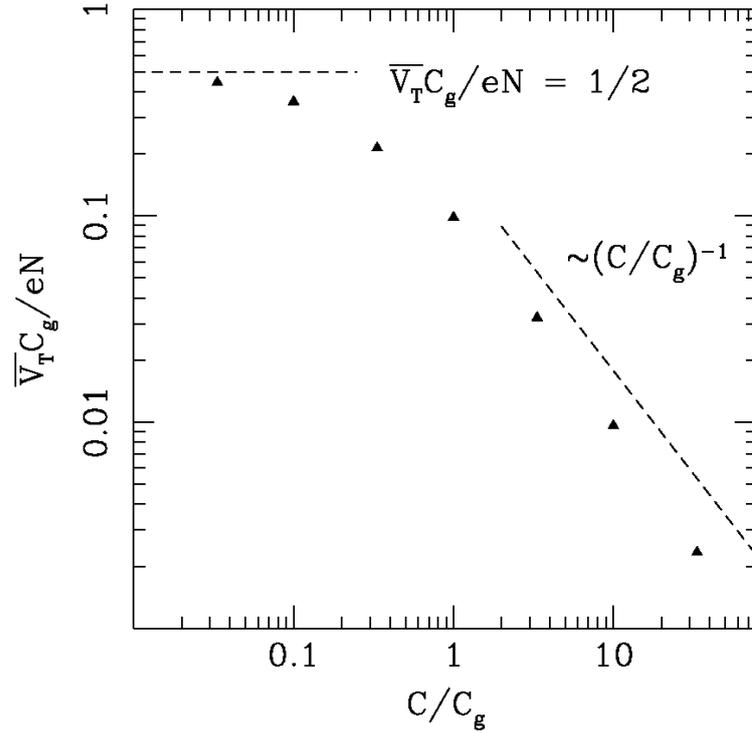


Fig.3.5 Potenziale di soglia per dot, \bar{V}_i/N , in unità di e/C_g , per la conduzione attraverso un sistema unidimensionale di dots metallici (non superconduttori) in funzione di C/C_g . La linea tratteggiata indica la predizione analitica.[24]

Si può osservare che $\alpha\left(\frac{C}{C_g} \rightarrow 0\right) \approx \frac{1}{2}$ (per un sistema 2D si trova, allo stesso modo, $\alpha\left(\frac{C}{C_g} \rightarrow 0\right) \approx 0.338$).

Nella condizione (3.18) si discute, ora, il comportamento dettagliato della corrente attraverso il sistema nelle ipotesi poste inizialmente.

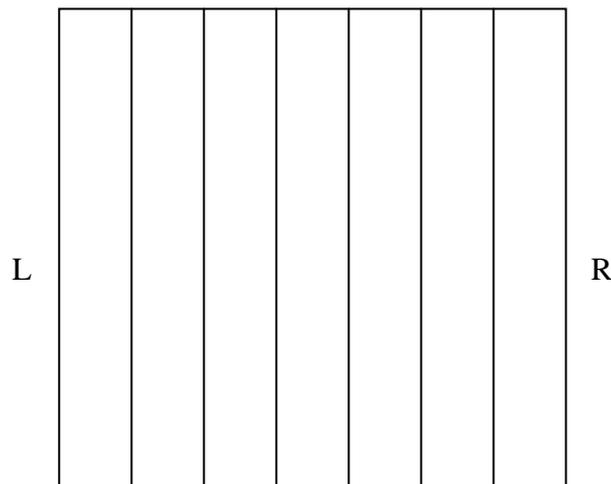
Si può iniziare con l'osservare che, considerando V_R fisso ed aumentando V_L , gli elettroni possono muoversi dall'elettrodo di sinistra verso il sistema. La condizione per cui un elettrone possa superare una barriera coulombiana ed operare tunnelling dal dot i al dot immediatamente vicino j è che

$$V_i > V_j + \frac{e}{C_g} \quad (3.20)$$

(con V_i e V_j le d.d.p. che cadono ai capi dei suddetti dots i e j). Per un fissato valore di V_L l'avanzamento di carica è inibito per $V_i \leq V_j + \frac{e}{C_g}$. Sebbene il tunnelling sia un processo puramente stocastico, la configurazione statica che si ottiene per $V_L < V_t$ è interamente determinata dalla particolare configurazione di disordine realizzatasi nel sistema. Dunque la posizione a cui una carica può penetrare definisce una univoca interfaccia. Appena V_L venga aumentato della quantità e/C_g , una carica viene aggiunta ad ogni punto sull'interfaccia e quindi *l'interfaccia può avanzare almeno di una quantità pari alla costante reticolare*. La conduzione avviene quando l'interfaccia raggiunge l'elettrodo di destra.

La figura 3.6.a schematizza il moto dell'interfaccia in assenza di disordine (in tale condizione un elettrone per ogni dot, ad un fissato valore di V_L , ha la stessa probabilità di raggiungere la stessa posizione) e la 3.6.b in presenza di disordine (in tale condizione, per un fissato valore di V_L , dato che i dot del sistema sono polarizzati in modo del tutto casuale dalle impurità casualmente disperse nel sistema, ciascun elettrone di ogni dot assume diversa probabilità di raggiungere la stessa posizione):

(a)



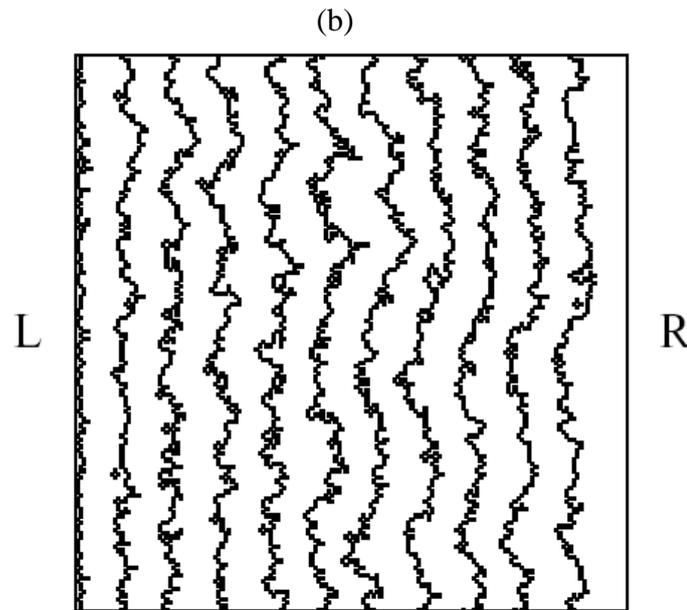


Fig.3.6 (a) Rappresenta il moto dell'interfaccia in assenza di disordine (b) in presenza di disordine. Ogni posizione dell'interfaccia va considerata ad un fissato valore di V_L . All'aumentare di V_L la posizione dell'interfaccia si avvicina sempre più all'elettrodo R. Quando V_L è tale che l'interfaccia raggiunga l'elettrodo R allora si verifica la conduzione elettrica attraverso il sistema.[24]

All'aumentare di V_L , il moto dell'interfaccia è del tutto simile alla crescita stocastica in presenza di disordine di una generica interfaccia e regolato dalla *equazione di Kardar-Parisi-Zang*[69, appendice B]. I risultati di questa equazione per una interfaccia (1-d) dimensionale sono utili per la comprensione del comportamento elettrico di un sistema d-dimensionale di dots quale quello in studio.

Nel caso $d = 2$, i risultati della equazione KPZ per il moto dell'interfaccia implicano che le fluttuazioni nella posizione del massimo spostamento della stessa interfaccia siano circa pari a $V_L^{\frac{1}{3}}(\ln V_L)^{\frac{1}{2}}$. Allora in base a ciò si può determinare che:

$$\frac{\Delta V_t}{V_t} \approx N^{-\frac{2}{3}}(\ln N)^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

$$\overline{V}_t(N) \frac{C_g}{eN} - \alpha \approx N^{-\frac{2}{3}} (\ln N)^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

per un sistema 2D $N \times N$ (per un sistema 1D formato da N dot, $\frac{\Delta V_t}{\overline{V}_t} \approx N^{-\frac{1}{2}}$).

Simulazioni numeriche su un sistema 2D con N fissato (pari 2560) sono ben fittate dalla (3.21) come mostrato in figura 3.7:

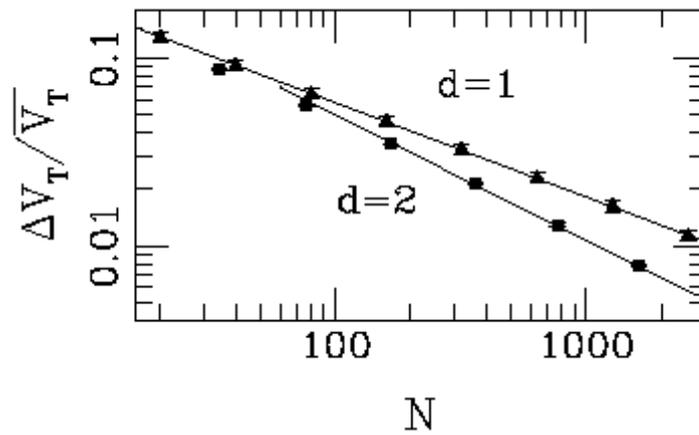


Fig. 3.7 Fluttuazioni ΔV_t su V_t in funzione delle dimensioni lineari del sistema sia per il caso 1D che 2D. Le linee continue indicano i fits effettuati secondo le formule sopra esposte sui dati ottenuti tramite simulazioni numeriche.[24]

Dalla equazione (3.17) unitamente ai risultati della KPZ si può giungere al seguente fondamentale risultato:

$$I = \frac{e}{2RC_g} \left(\frac{V_L - V_t}{V_t} \right)^\beta \quad (3.23)$$

quando sia V_L confrontabile con V_t (precisamente quando sia verificata la condizione $V_L - V_t \ll e/C_g$) e con $\beta = 5/3$ (accurate simulazioni Montecarlo danno $\beta \approx 1$ per sistemi 1D e $\beta \approx 2$ per sistemi 2D).

(In particolare il valore $5/3$ è previsto da considerazioni riguardanti la KPZ; per approfondimenti si possono consultare l'appendice B e [69, 32]).

Si osservi che, secondo questo modello, nel limite di temperature stabilito dalla (3.15), l'esponente β risulta indipendente dalla stessa temperatura.

La (3.23) è in buon accordo con risultati ottenuti tramite simulazioni numeriche come viene mostrato in figura 3.8:

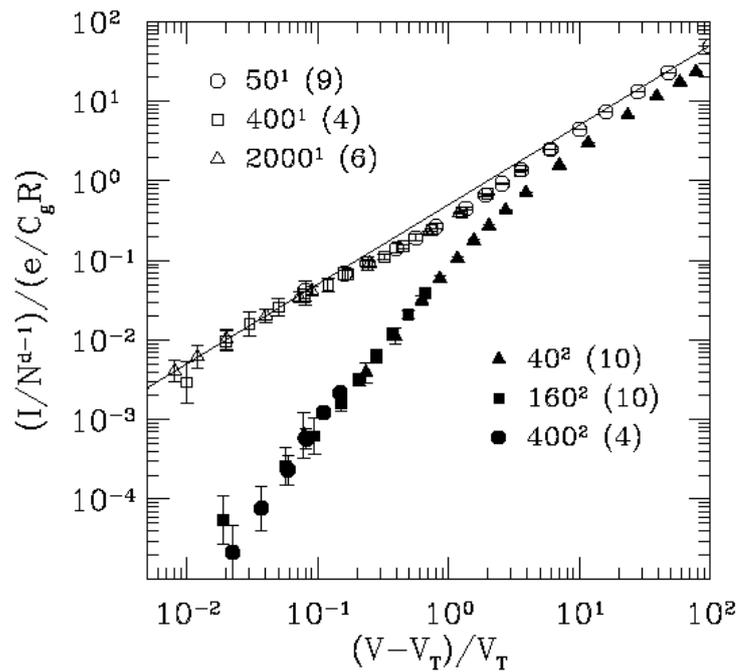


Fig.3.8 Plot delle caratteristiche I-V, in scala logaritmica, ottenuti tramite simulazioni numeriche per sistemi 1D e 2D di dots metallici, per potenziali applicati confrontabili con quello di soglia. Per i casi 1D è, inoltre, indicato il fit dei dati ottenuti tramite la funzione (3.23) con $\beta=1$.

I numeri in alto indicano i numeri di dots costituenti i sistemi 1D e quelli più in basso il numero di dots per lato costituenti quelli 2D. Si osservi che l'insieme dei sistemi 1D e l'insieme dei sistemi 2D sono formati da sistemi che differiscono oltre che per il loro numero di dots anche per la particolare configurazione di disordine realizzata (la cui "intensità è inducata dai numeri in parentesi).[24]

In sintesi i risultati fondamentali per il trasporto elettronico attraverso sistemi 1D e 2D di dots metallici, nelle ipotesi del modello di Middleton e Wingreen, possono così essere riassunti:

- 1) Quando sia realizzata la condizione $V - V_t \ll e/C_g$ allora la corrente viene trasportata da un singolo “canale” nel senso che tutti gli elettroni tendono a muoversi attraverso un unico insieme di barriere tunnel con poche ramificazioni: questo è esattamente quello di minima resistenza (minor numero di barriere e barriere più trasparenti):

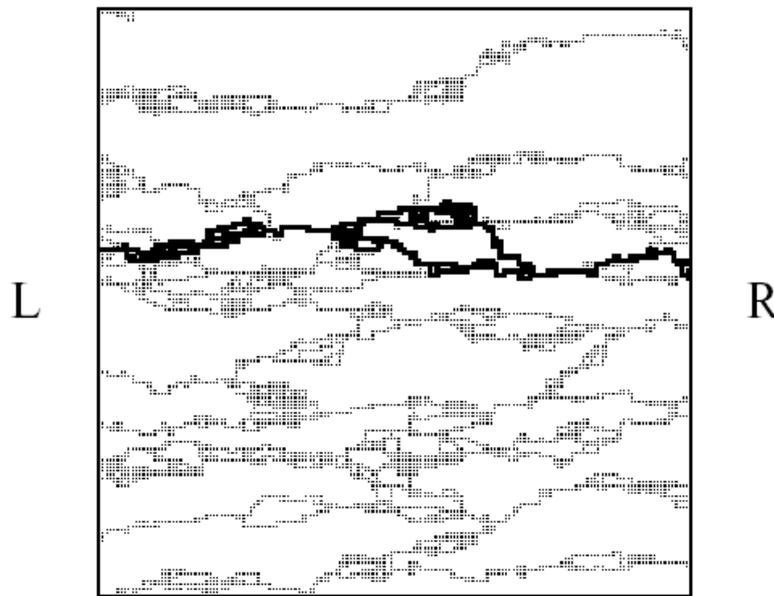


Fig.3.9 Per potenziali vicini a quello di soglia, in un sistema 2D, tra tutti i possibili canali di conduzione per la corrente, uno solo è quello favorito (più probabile).[24]

In questa situazione la conduzione del sistema è descritta dalla legge (3.23).

- 2) Quando V sia non molto più grande di V_t ($V > V_t$) allora nel sistema si aprono molti canali di conduzione per la corrente con ramificazioni e connessioni (molti insiemi diversi di barriere tunnel acquistano probabilità simili di essere attraversati dagli elettroni):



Fig.3.10 Per potenziali non molto superiori a quello di soglia, in un sistema 2D, sono favoriti molti canali per la conduzione della corrente attraverso il sistema.[26]

In questa situazione la conduzione del sistema è ancora descritta dalla (3.23).

3) Quando il potenziale applicato V sia molto più grande del potenziale di soglia ($V \gg V_t$) allora si aprono, nel sistema, moltissimi canali di conduzione che si ramificano tra di essi. In questa situazione si può, dunque, pensare che il sistema entri in una fase conduttiva di tipo percolativa, seguendo una legge di conduzione di tipo ohmica ($I \propto V$):

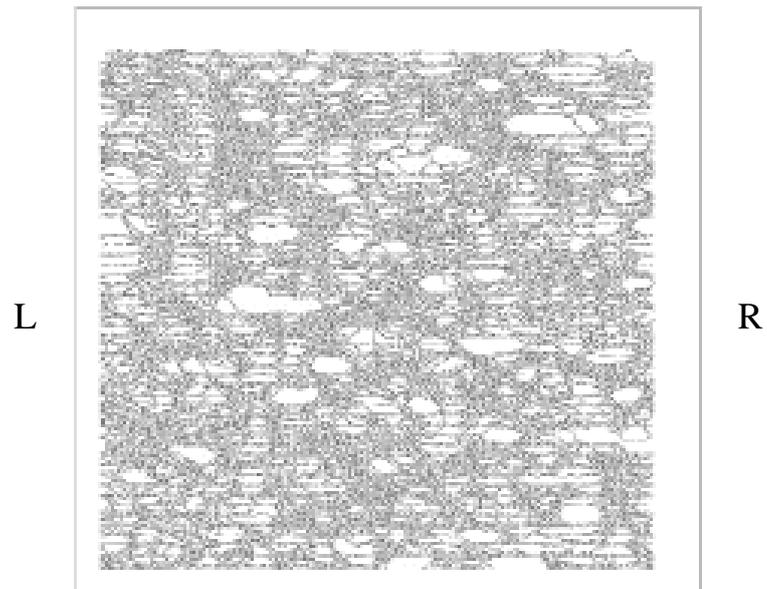


Fig.3.11 Per potenziali applicati molto superiori a quello di soglia, in un sistema 2D, moltissimi canali sono favoriti per la conduzione della corrente attraverso il sistema: questo stesso va in percolazione e conduce in modo ohmico.[26]

Detto tutto ciò, si può affermare che, per sistemi 1D e 2D di dots metallici rispettanti le ipotesi del modello esposto, si prevedono caratteristiche I-V del seguente tipo:

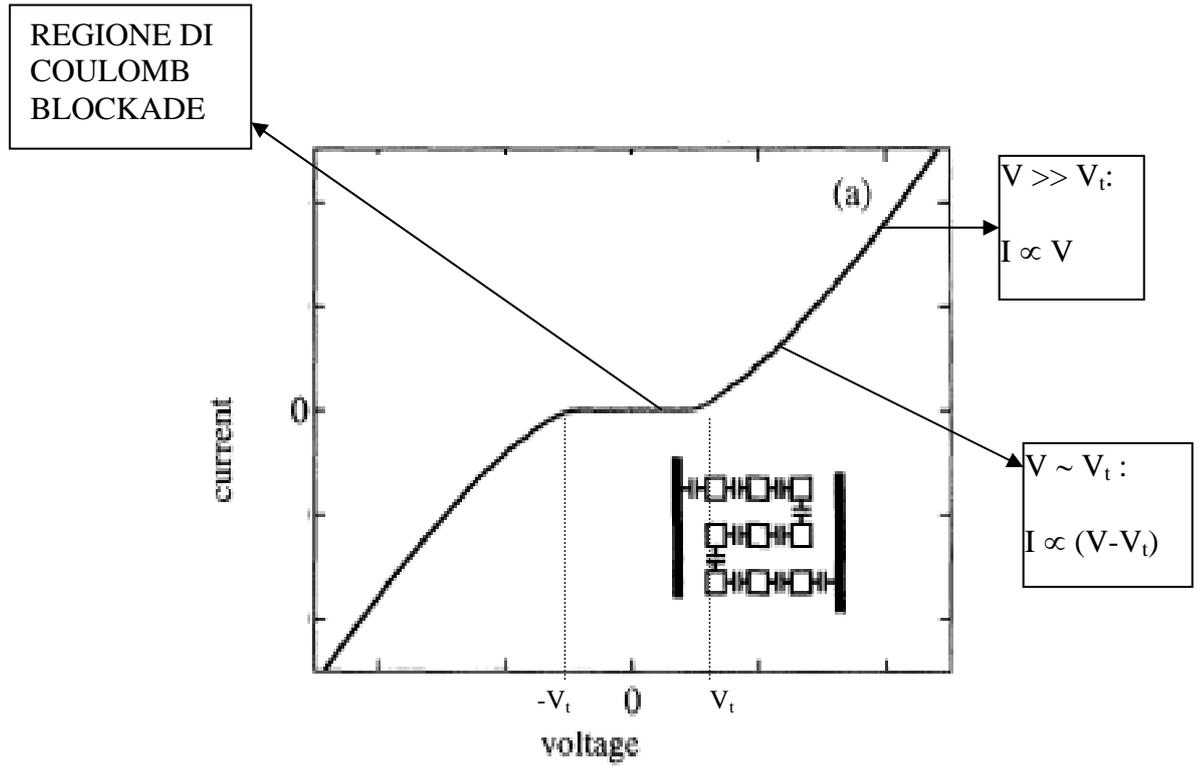


Fig.3.12.a Schematizzazione della caratteristica I-V prevista dal modello di Middleton e Wingreen per un sistema 1D di dots metallici e per una T fissata nel range stabilito dalla (3.15).

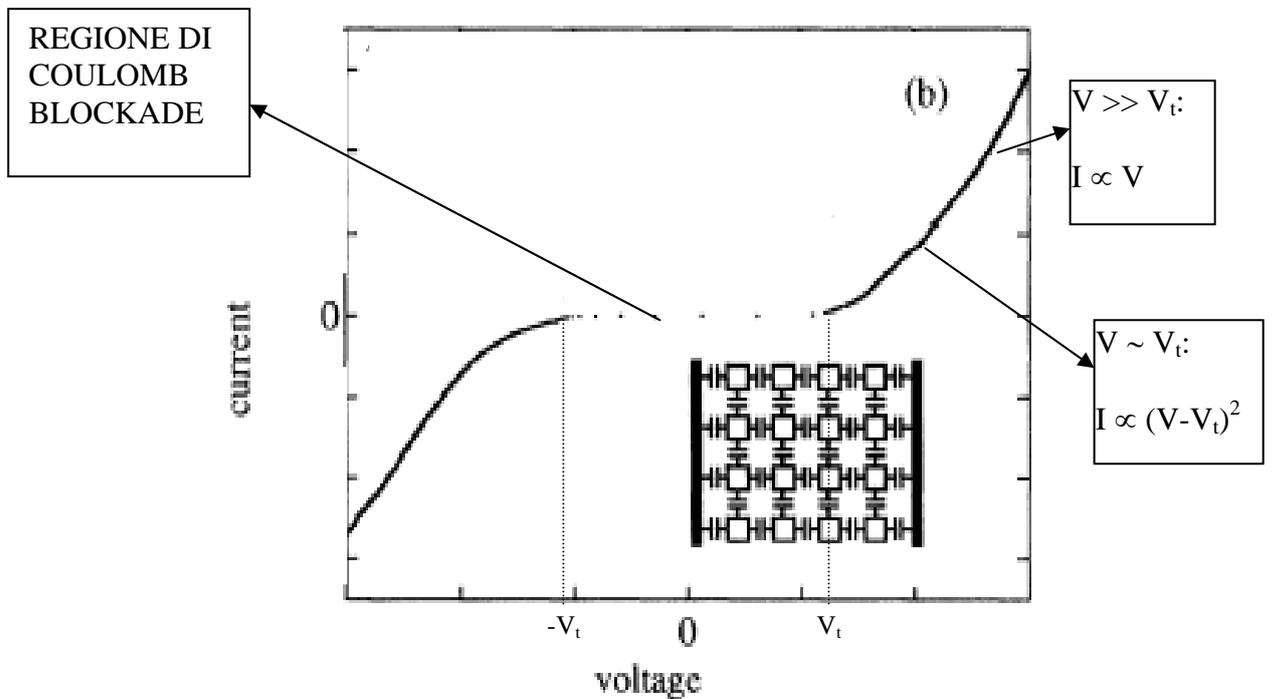


Fig.3.12.b Schematizzazione della caratteristica I-V prevista dal modello di Middleton e Wingreen per un sistema 2D di dots metallici e per una T fissata nel range stabilito dalla (3.23).

3.2.4 GENERALIZZAZIONE DEL MODELLO DI MIDDLETON E WINGREEN ED EFFETTO DELLA TEMPERATURA SUL TRASPORTO[27]

Il modello proposto da Middleton e Wingreen è stato sviluppato per una temperatura fissata del sistema che rispetti la (3.15). In questo paragrafo si vuole brevemente illustrare un modello semiempirico proposto da Parthasarathy *et al.*[27] che tenta di generalizzare il modello precedente a T generica, cioè di spiegare il trasporto elettronico collettivo in sistemi di dots metallici anche a temperature non rispettanti la condizione (3.15) e capire come e perchè vari la caratteristica I-V del sistema al variare della sua temperatura).

Lo studio qui esposto è, quindi, rivolto alla comprensione del ruolo della temperatura sul tunnelling di singolo elettrone in arrays di nanocristalli metallici in presenza di disordine (nel senso specificato nel paragrafo precedente). Data la complessità dell'argomento e dato che il modello stesso è ancora in fase di studio ed elaborazione ci si limita qui ad elencare i suoi punti fondamentali senza pretesa di eccessivo approfondimento.

Le ipotesi di questo modello sono di seguito riassunte:

- 1) Si suppongano valide tutte le ipotesi poste dal modello di Middleton e Wingreen a parte il fatto che T del sistema possa essere generica: si suppone, quindi che il sistema rispetti le condizioni (3.14), (3.18) e non, in generale, la (3.15). Il disordine viene incluso come indicato dall'ipotesi 3 del modello del paragrafo precedente.
- 2) Si supponga che **una generica temperatura T del sistema abbia l'effetto di rimuovere il comportamento di soglia (Coulomb blockade) da una frazione $p(T)$ delle giunzioni tunnel del sistema rendendole a tutti gli effetti resistori lineari.**

Partendo da queste ipotesi e da osservazioni sperimentali (essenzialmente basate su caratteristiche I-V di sistemi 2D di nanocristalli di oro su un substrato isolante [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 37]) si ricavano i seguenti risultati:

Esiste una temperatura T^* definita da $V_t(T^*) = 0$, per cui:

a) Se $T \ll T^*$:

Si realizza una situazione per cui la probabilità di tunnelling termico per gli elettroni del sistema è trascurabile rispetto a quella di tunnelling coulombiano (si ricade nella condizione stabilita dalla (3.15)).

Allora il modello di Middleton e Wingreen continua ad essere valido ed in particolare si prevedono caratteristiche I-V del sistema come da esso specificato e circa indipendenti da T ($V_t \approx$ costante con T , $\beta \approx$ costante con T);

b) Se $T \sim T^*$:

Si realizza una situazione per cui la probabilità di tunnelling termico per gli elettroni del sistema è confrontabile con quella di tunnelling coulombiano.

In tale condizione si prevede che le caratteristiche I-V del sistema, a varie temperature, mantengano la forma non lineare espressa dal modello di Middleton e Wingreen ma con un potenziale di soglia che decresce linearmente all'aumentare della temperatura, come espresso dalla:

$$V_t(T) = a_1 - a_2 T \quad (3.24)$$

con a_1 ed a_2 opportune costanti positive.

c) Se $T \geq T^*$:

Si realizza una situazione per cui il trasporto elettronico avviene sopra barriera (gli elettroni acquistano energia sufficiente per “saltare” fisicamente le barriere di potenziale tra i dots).

In tale condizione si prevede che il comportamento di soglia delle caratteristiche I-V del sistema svanisca ($V_t(T \geq T^*) = 0$) e che la conduttanza del sistema a bassi potenziali acquisti una forma attivata termicamente, come espresso da:

$$G(V \rightarrow 0, T \geq T^*) \propto \exp\left(-\frac{U}{T}\right) \quad (3.25)$$

con energia di attivazione

$$U = bk_B T^* \quad (3.26)$$

essendo b un opportuno fattore (~ 2.4) che tenga conto del fatto che gli elettroni debbano obbedire alla statistica di Fermi-Dirac.

Una spiegazione qualitativa del modello sviluppato da Parthasarathy e collaboratori può essere data nei seguenti termini:

Si dica $\Delta\mu$ l'altezza di una generica barriera di potenziale incontrata da un elettrone del sistema e sia $P(\Delta\mu)$ una funzione che indichi la distribuzione (densità di probabilità) delle altezze di queste barriere. Per semplicità, si supponga che la distribuzione di impurità di fondo ionizzanti presenti nel sistema sia uniforme, piatta e con valori compresi in $\left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right]$. In questa condizione $P(\Delta\mu)$ può essere approssimata[27] come indicato in figura 3.13:

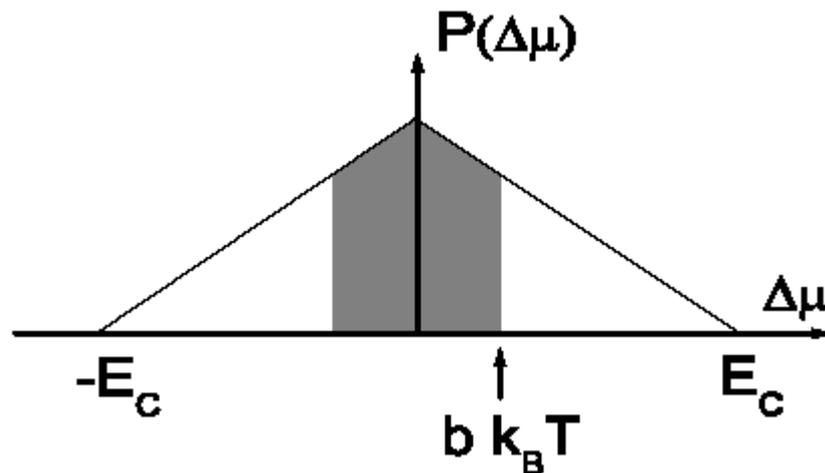


Fig.3.13 Densità di probabilità per l'altezza dei gradini. Per una fissata energia termica, il numero di barriere di potenziale con altezza $\Delta\mu$ che, percentualmente, cade entro la regione ombreggiata perde il suo comportamento di soglia.[27]

che può essere analiticamente espressa da:

$$P(\Delta\mu) = \left(\frac{1 - \frac{|\Delta\mu|}{E_C}}{E_C} \right) \quad (3.27).$$

In base all'ipotesi 2 posta inizialmente in questo paragrafo, si considera che ad una determinata T tutte le giunzioni tunnel con altezza $|\Delta\mu| < bk_B T$ perdano il loro comportamento di soglia e si comportino, relativamente alla conduzione di elettroni, in maniera lineare. Come detto il fattore b tiene in conto del fatto che gli elettroni entro ogni dot si debbano distribuire, all'equilibrio termodinamico, secondo la statistica di Fermi-Dirac: è possibile mostrare[27] che $b = 2.4$. Alla fissata temperatura T del sistema, affinché un elettrone passi dalla conduzione di tipo non lineare di Coulomb blockade alla conduzione di tipo lineare, è necessario applicare una d.d.p. almeno pari a $\frac{\Delta\mu}{e} \approx bk_B T$. Per una fissata T , il valore della funzione $p(T)$ è dato dall'area della regione ombreggiata in figura 3.13, cioè dall'integrale di $P(\Delta\mu)$ tra i limiti $\pm 2.4k_B T$. Questo porta alla relazione

$$p(T) = \frac{2.4k_B T}{E_C} \left(2 - \frac{2.4k_B T}{E_C} \right).$$

Poichè l'effetto della temperatura T è quello di rimuovere il comportamento di soglia da una frazione $p(T)$ di giunzioni tunnel del sistema è, allora, evidente che V_t debba diminuire proporzionalmente all'aumento dello stesso $p(T)$. In particolare alcune considerazioni di natura semiempirica fanno sì che si aspetti una dipendenza del tipo $V_t(T) = V_t(0) \left(1 - \frac{p(T)}{p_c} \right)$ che può essere esplicitata nella (3.24).

Per $T > T^*$ e per potenziali applicati sufficientemente piccoli, il sistema si può pensare entrare in una fase di conduzione percolativa in cui, però, la stessa conduzione attraverso i singoli cammini percolativi è dominata da un

trasporto sopra barriera di tipo termico. Lo studio di un tale tipo di conduzione[83] porta alla (3.25).

Di seguito è riportata una schematizzazione delle caratteristiche I-V che ci si aspetta di determinare al variare della temperatura per sistemi disordinati di nanocristalli metallici (in particolare 2D) secondo il modello sopra esposto:

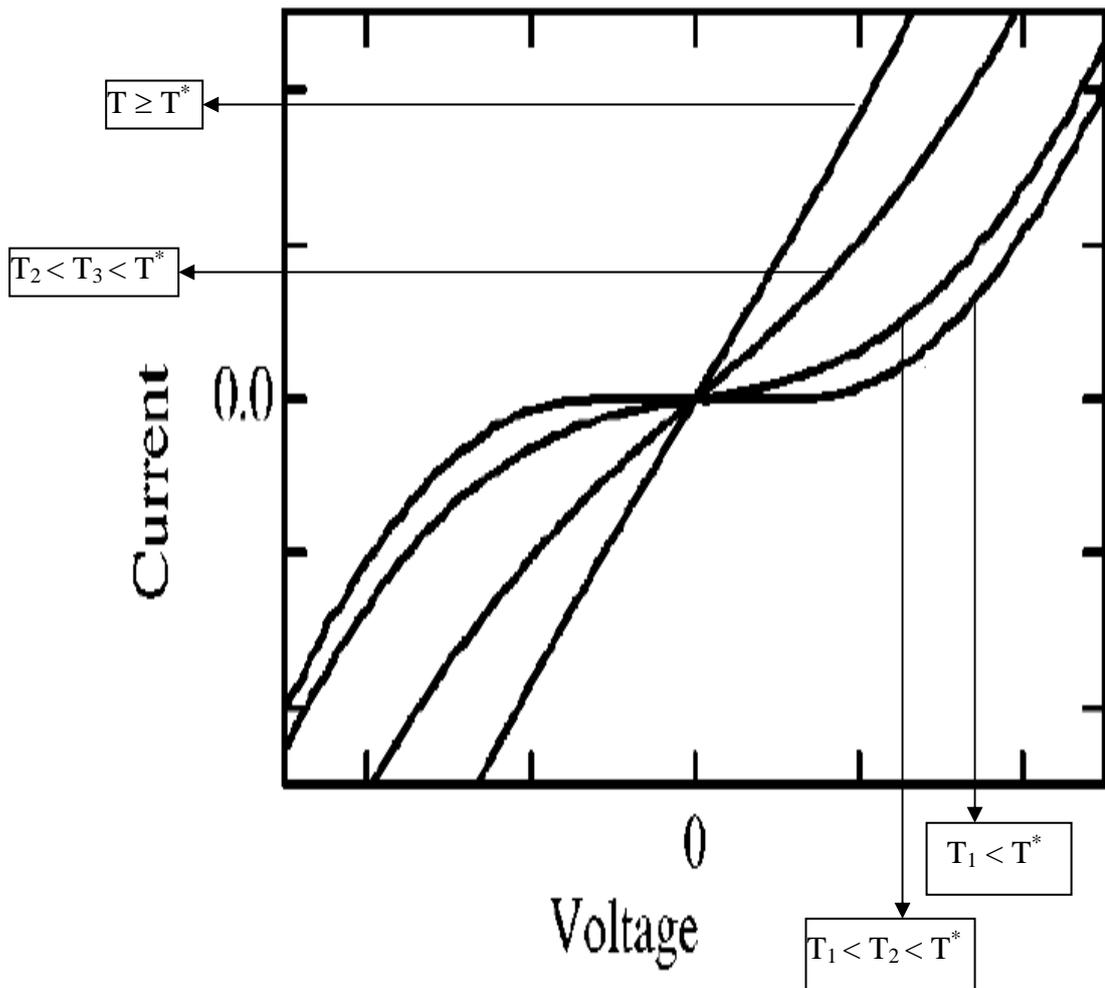


Fig.3.14 Schematizzazione del comportamento delle caratteristiche I-V in funzione della temperatura per un sistema di nanocristalli metallici in presenza di disordine.

3.3 IMPORTANTI DATI SPERIMENTALI PRESENTI IN LETTERATURA

In questa sezione si riporta la descrizione di un tipico esperimento riguardante la caratterizzazione elettrica di un sistema di nanocristalli metallici presente in letteratura. Ciò viene sviluppato allo scopo di poter confrontare innanzitutto i tipici sistemi di nanocristalli metallici presi in considerazione generalmente in letteratura con il campione da noi analizzato in questo lavoro nonché i tipici dati sperimentali I-V (e la loro analisi) relativi a tali sistemi con quelli da noi ottenuti ed analizzati. In particolare quanto qui riportato è basato sui classici lavori di R. Parthasarathy e collaboratori [27, 32]. Analoghi ed altrettanto interessanti esperimenti possono essere trovati nei riferimenti [25, 26, 31, 33, 35].

I campioni generalmente presentati in letteratura sono realizzati, sostanzialmente, dalla deposizione in fase vapore di nanocristalli di oro (o Ag o Al mantenuto allo stato normale) su un substrato isolante (tipicamente di Si_3N_4). Al sistema siffatto vengono realizzati due elettrodi in Cr utilizzando la litografia a fascio elettronico.

In particolare due diverse tecniche di preparazione portano a due distinte classi di sistemi: campioni con e senza un disordine strutturale su larga scala. Allorché si proceda ad una semplice deposizione dei nanocristalli sul substrato, in quantità di 15-20 μl , si ottiene un monolayer a bassa densità degli stessi nanocristalli e con numerosi siti vacanti ($\sim 20\%$ - 30% come indicato da analisi TEM). Quando, invece, si operi una deposizione di una quantità molto maggiore di nanocristalli si ottiene un sistema con densità di nanocristalli molto maggiore (quindi con un numero di siti vuoti molto minore, $\sim 5\%$) e presentante, quindi, un maggiore ordine a lungo range (maggiore periodicità a lungo range). La figura 3.15 mostra una schematizzazione dei campioni in esame, due analisi TEM planari di due campioni preparati con le due tecniche sopra descritte (è evidente la notevole differenza di ordine tra di essi) ed una immagine TEM in cross di un campione con ordine a lungo range.

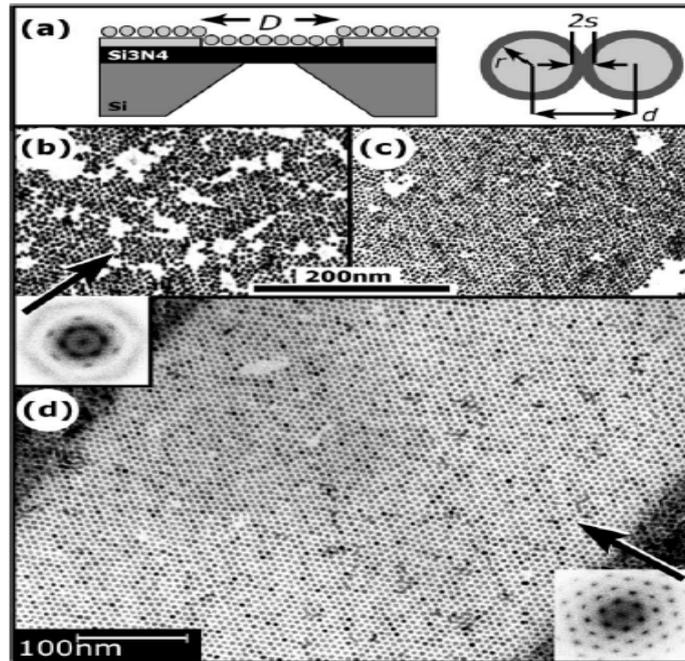


Fig.3.15 (a) Schematizzazione di un monolayer di nanocristalli di oro. (b) Immagine TEM planare di un tipico “array” che mostra chiaramente un grande numero di siti vuoti e quindi un ordine solo a corto range. (c) Immagine TEM planare di un tipico “array” che mostra chiaramente un piccolo numero di siti vuoti rispetto al precedente, e quindi un maggiore ordine a lungo range. (d) Immagine TEM in cross di un campione con ordine a lungo range. I due piccoli inserti mostrano delle analisi alla Bragg sui due tipi di campioni (quella in alto per il campione più disordinato, quella in basso per il campione più ordinato).[32]

I campioni analizzati sono stati 7 preparati in modo da presentare ordine a lungo range e sette a corto. Ogni campione ha dimensioni $N \times M$ (N lunghezza, M larghezza) essendo, per i vari campioni, M fissato a circa 270 nanocristalli e N variabile tra 30 e 90 nanocristalli. Si noti che i sistemi ottenuti sono praticamente bidimensionali.

Sui campioni così realizzati sono state effettuate delle misure di caratteristiche I-V a varie temperature di cui alcune vengono riportate in figura 3.16:

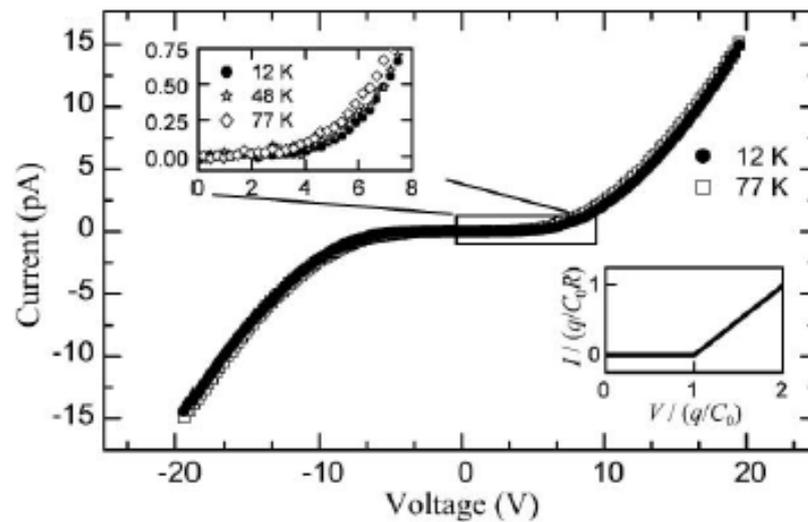


Fig.3.16 Caratteristiche I-V per uno dei campioni analizzati alle temperature 12K, 48K, 77K. L'inserto in basso mostra una tipica caratteristica I-V ideale per un solo nanocristallo.[32]

Si può osservare che le caratteristiche ottenute per tutti i campioni sono simmetriche rispetto all'origine e non presentano fenomeni di isteresi. Analisi TEM permettono, inoltre, di determinare come raggio medio dei nanocristalli $r \approx 2.2$ nm, e come distanza media tra gli stessi $s \approx 1$ nm (0.85 nm per i campioni meno ordinati, 1.2 nm per quelli più ordinati).

Il marcato comportamento non ohmico, per cui il fluire della corrente attraverso il sistema richiede che la d.d.p. applicata sia più grande di una soglia, è caratteristico di un fenomeno di Coulomb blockade per il trasporto, come descritto nei paragrafi 3.2.3 e 3.2.4. L'energia elettrostatica necessaria per aggiungere un elettrone ad un dot del sistema di carica q e capacità $C_0 = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r$ porta ad una tensione di soglia per singola particella del sistema pari a $V_0 = q/C_0$, al di sotto del quale il tunnelling di elettroni è inibito. Per $V > V_0$ un elettrone può operare tunnelling entro un dot incontrando una resistenza di tunnelling $R = dV/dI$ (per i campioni in esame i dati sperimentali mostrano che $R = 30-50$ T $\Omega \gg h/e^2$). In sintesi, allora, le caratteristiche I-V di ogni campione a molti dots derivano da opportune combinazioni in serie e parallelo di molti percorsi di tunnelling da dot a dot attraverso il sistema totale. Le cariche parassite casualmente disperse nel substrato polarizzano i dots del sistema in modo casuale e seguendo il modello di MW si suppone che

ogni dot sia polarizzato con una carica q che per semplicità si prende eguale per tutti i dots e mediamente pari a $e/2$. In questo modo, considerando una costante dielettrica $\epsilon \approx 2$, si ottiene $C_0 \approx 0.5$ aF. Inoltre la capacità di accoppiamento tra dots primi vicini, stimata in base alla geometria osservata al TEM, risulta essere $C_{12} \approx 0.25$ aF $< C_0$: come detto nell'ambito del modello MW, in questo regime le caratteristiche I-V non presentano fenomeni di isteresi come confermato dai dati sperimentali.

L'applicazione del modello di Middleton e Wingreen ai dati sperimentali ottenuti per i campioni descritti comporta che queste caratteristiche I-V debbano seguire una legge del tipo $I \propto (V-V_t)^\beta$. In effetti opportune scelte di V_t fanno sì che le caratteristiche I-V per tutti i campioni in esame indipendentemente da N e dal grado di disordine, possano essere fittate più o meno bene dalla suddetta forma funzionale con $\beta = 2.25$.

In particolare, come viene mostrato in figura 3.17, questi fits risultano migliori per i campioni a più alto grado di ordine (per cui si ottiene $\beta \approx 2.25 \pm 0.1$).

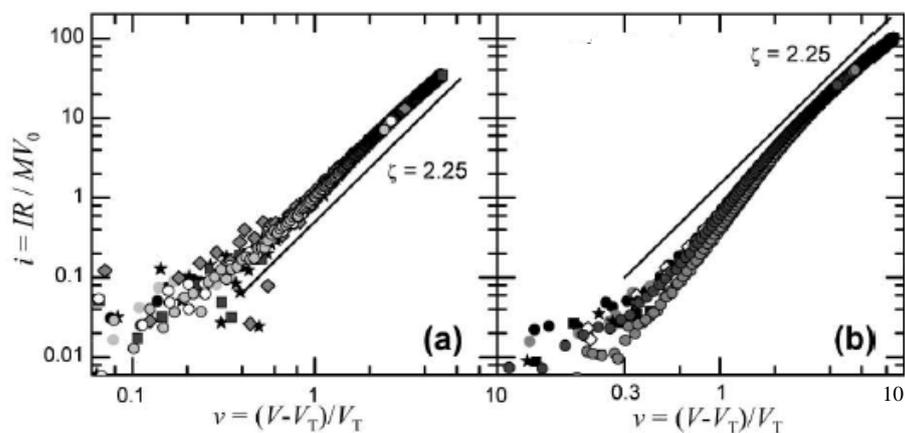


Fig.3.17 “Scaling behavior” delle curve I-V. (a) Plot Log-log di tutti i dati per i sette campioni con ordine a lungo range. La linea continua indica il best-fit effettuato con la legge di potenza di cui detto e con $\beta = 2.25 \pm 0.1$. (b) Plot Log-log di tutti i dati per i sette campioni con ordine a corto range. La linea continua indica il fit effettuato con la legge di potenza di cui detto con $\beta = 2.25$. Il best fit si ottiene per $\beta = 2.16 \pm 0.1$. [32]

Una ultima interessante osservazione riguarda il fatto che i dati sperimentali

raccolti al variare di N mostrano che $V_t \frac{C_0}{e} = \alpha N$ con $\alpha = 0.25 \pm 0.1$.

La conclusione fondamentale che si può trarre dall'esperimento descritto in questo paragrafo è la differenza tra il comportamento tra i campioni più e meno ordinati: come evidentemente indicato dai dati di fig.3.17 la legge (3.23) descrive meglio lo "scaling behavior" in campioni con ordine a lungo range e meno in quelli con ordine a corto range.

Per studiare più in dettaglio l'effetto della temperatura sul processo di trasporto elettronico attraverso sistemi di nanocristalli metallici si descrive di seguito un altro esperimento nelle sue linee essenziali del tutto analogo al precedente. In particolare è dai dati ricavati da un tale esperimento che sono state tratte dal punto di vista teorico le considerazioni del paragrafo 3.2.4.

Le misure sono effettuate su una serie di sistemi bidimensionali di arrays di nanocristalli di oro debolmente accoppiati tra di essi. Questi sistemi sono stati realizzati come descritto all'inizio di questo paragrafo, in particolare utilizzando la tecnica che ha permesso di ottenere campioni con un ordine a lungo range (in modo tale da trascurare gli effetti del disordine strutturale rispetto agli effetti di disordine introdotti dalla temperatura). Sono, così, stati realizzati undici campioni di dimensioni $N \times M$ con M fissato a circa 270 particelle ed N variabile, in base al campione, tra 27 e 170 particelle (come risulta da analisi TEM). Le analisi TEM hanno permesso di stimare il diametro medio del singolo nanocristallo al variare del campione in $d \approx 4.5\text{nm} \div 6\text{nm}$ con una dispersione, per campione, di circa il 5%. Le misure I-V effettuate sui campioni sono state effettuate a temperature varianti tra 10K e 130K.

Per un nanocristallo metallico isolato di diametro di 6 nm e circondato da dielettrico Si_3N_4 con costante dielettrica relativa che si valuta in $\epsilon \approx 2$, l'energia di carica coulombiana risulta essere $E_C \approx 240$ meV e la capacità del singolo nanocristallo risulta essere $C_0 \approx 0.7$ aF. In effetti, la variazione di diametro medio dei nanocristalli al variare del campione porta ad una E_C variabile tra 87 meV e 290 meV per gli 11 campioni in esame. Si può considerare che[24] la carica parassita presente nel substrato che polarizza in modo casuale i dots del sistema abbia l'effetto complessivo di distribuire il livello di Fermi di ogni dot tra $-0.5E_C$ e $0.5E_C$. Le caratteristiche I-V alle diverse temperature per uno dei campioni in esame (quello con $N = 128$) sono

mostrate in figura 3.18 (tutti i campioni esaminati mostrano comportamenti analoghi).

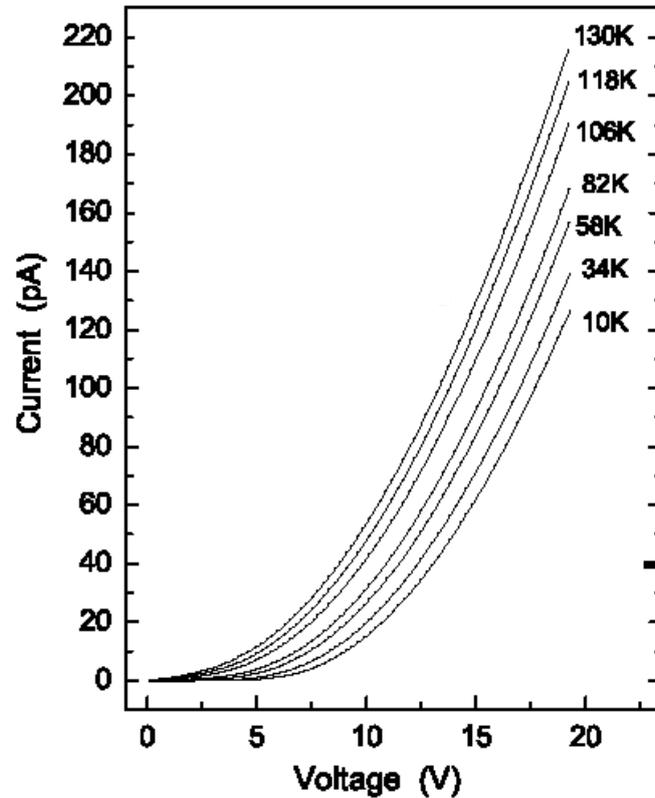


Fig.3.18 Evoluzione delle curve I-V con la temperatura per un array di lunghezza $N = 128$. Le curve alle varie temperature sono pressoché simmetriche rispetto all'inversione di potenziale.[27]

Alle basse temperature indagate tutte le curve presentano un chiaro potenziale di soglia per la conduzione. La figura 3.19 mostra, per alcuni dei campioni analizzati, come i potenziali di soglia stimati a ciascuna temperatura varino in funzione della temperatura stessa. Essa mostra chiaramente come per ciascun campione il potenziale di soglia decresca linearmente con la temperatura. I potenziali di soglia negativi non indicano altro che a temperature sufficientemente alte il trasporto attraverso il sistema non avviene più per tunnelling ma per superamento della barriera di potenziale (a tali temperature gli elettroni hanno acquistato abbastanza energia per andare da un dot all'altro

saltando la barriera di potenziale che gli separa: si parla di trasporto “over barrier”).

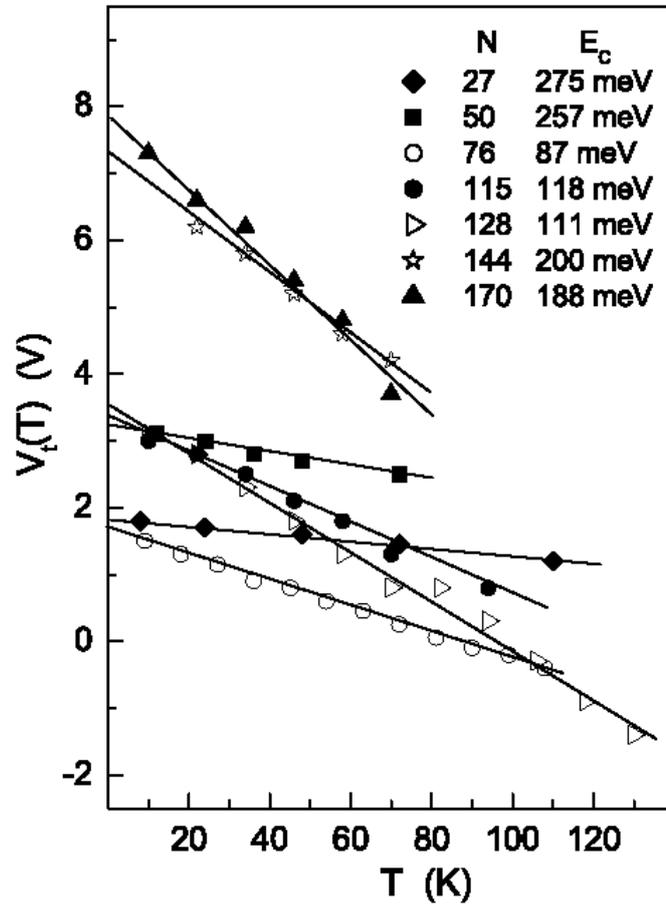


Fig.3.19 Potenziale di soglia in funzione della temperatura per alcuni dei campioni analizzati.[27]

La figura 3.20 mostra, per una T fissata, le curve I - V , per tre campioni esaminati, in scala Log-Log, fittate con la legge di potenza $I \propto (V - V_t)^\beta$. I best-fits si ottengono, in tutti i casi, per $\beta \approx 2.25 \pm 0.1$.

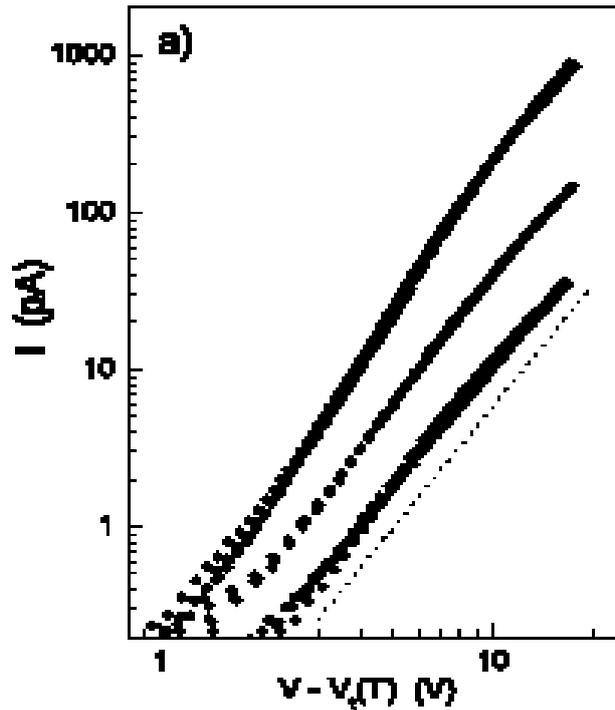


Fig.3.20 Alcune caratteristiche I-V, a diverse temperature, per uno dei sistemi in esame, in scala Log-Log. Il best-fit con la legge di potenza si ottiene per $\beta = 2.27$.

Per ogni campione, tramite i grafici del tipo 3.19, è stata stimata la temperatura T^* definita nel paragrafo 3.2.4 come la temperatura tale che $V_t(T^*) = 0$. I dati sperimentali hanno mostrato che per ogni campione a $T > T^*$ le curve I-V perdono l'andamento non lineare caratterizzato da un potenziale di soglia, ma ciascuno dei campioni, in questo range di temperature, ha acquistato una conduttanza differenziale $g = \frac{dI}{dV}$, per potenziali sufficientemente piccoli, attivata termicamente (come espresso dalla (3.25)). Ciò viene mostrato in figura 3.21 per il campione con $N = 128$ (ed avente $E_C = 111\text{meV}$) per cui T^* è stata stimata in circa 100K.

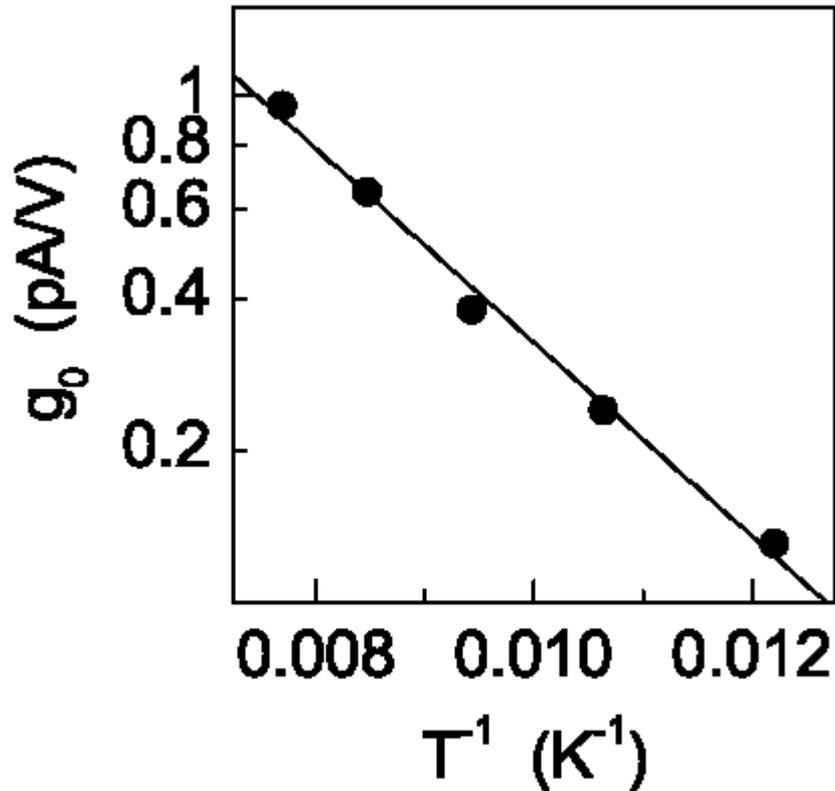


Fig.3.21 Conduttanza del campione con $N = 128$ in funzione della temperatura per T comparabile o maggiore di T^* e per un potenziale applicato molto piccolo. Dal grafico è evidente che tale conduttanza, in queste condizioni, ha una forma attivata termicamente.[27]

3.4 CONCLUSIONI

Questo terzo capitolo, insieme al successivo, è quello centrale di questo lavoro. In esso sono stati descritti i modelli teorici di base che permettono lo studio di insiemi costituiti da un grande numero di dots metallici in presenza di disordine. Come già detto, l'aver capito, almeno in parte, come le fonti di disordine e la temperatura (in ultima analisi anch'essa trattata come una fonte di disordine) influiscano sul trasporto elettronico attraverso sistemi di nanocristalli metallici è stato un passo decisivo nello sviluppo della nanoelettronica. Si tenga presente che il problema in esame non è ancora del tutto risolto: lo sforzo odierno è rivolto, dal punto di vista fisico, alla

elaborazione di modelli sempre più realistici, cioè di modelli che possano includere al loro interno gli effetti delle più svariate forme di disordine.

Il modello di Middleton e Wingreen ha senz'altro il merito notevole di essere stato il primo ad introdurre il disordine nella trattazione della conduzione elettronica attraverso i sistemi di cui detto. L'ipotesi attraverso cui esso viene introdotto è assai generale e permette una trattazione analitica relativamente semplice che porta a previsioni che sono in ottimo accordo con dati sperimentali (come si vedrà nel seguente paragrafo) per un range abbastanza grande di tipologie di sistemi. È anche ovvio che, data la vastità e la complessità delle fonti di disordine possibilmente presenti in un sistema, il modello suddetto vada di volta in volta migliorato ed adattato per ottenere, come detto, una descrizione quanto più realistica possibile.

I recenti lavori di Parthasarathy *et al.* hanno, poi, avuto il merito di iniziare a guardare in modo dettagliato a quali potessero essere gli effetti della temperatura sul trasporto elettronico nei sistemi in esame. Si vuole sottolineare il fatto che in questa direzione il lavoro è appena agli inizi e le considerazioni riportate in questo capitolo in tale senso non sono che le primissime.

Nella seconda sezione del presente capitolo si sono voluti descrivere i dati sperimentali più significativi riguardanti il trasporto elettronico in sistemi disordinati di nanocristalli metallici. Gli aspetti fondamentali, comuni a tutti gli esperimenti descritti ed in generale presenti in letteratura su tale questione, sono i seguenti.

In primo luogo la tipologia dei sistemi analizzati: vengono sempre analizzati sistemi costituiti da un numero relativamente molto basso di nanocristalli (qualche centinaio per lato). Il motivo di questo fatto risiede innanzitutto nella possibilità di poter confrontare i dati sperimentali ottenibili da tali sistemi con i dati ottenibili da modelli simulativi dei processi in esame (è evidente che notevoli difficoltà tecniche insorgerebbero per simulazioni su sistemi ad un grandissimo numero di corpi) ed inoltre in una maggiore e più semplice possibilità di controllo di un sistema a pochi corpi rispetto ad uno a molti corpi (è evidente che all'aumentare del numero di dots costituenti il sistema aumenti notevolmente la sua "caoticità"). Si vuole, però, sottolineare il fatto che, fondamentalmente, l'interesse per sistemi costituiti da un numero non

molto elevato di dots risiede in una questione di pura semplicità di analisi sperimentale: infatti, i modelli teorici sviluppati nel capitolo tre prescindono dal numero di dots costituenti il sistema.

In secondo luogo si vuol porre l'attenzione sul fatto che tutti i dati sperimentali ottenuti sui sistemi analizzati sono in ottimo accordo con quelli previsti secondo i modelli esposti nel capitolo III: a temperature opportunamente basse le caratteristiche I-V dei sistemi in esame presentano l'andamento non lineare previsto nei paragrafi 3.2.3 e 3.2.4 caratterizzato da un potenziale di soglia per la conduzione che scala linearmente con la temperatura come espresso dalla (3.24). In questo limite di basse temperature le stesse caratteristiche I-V sono ottimamente descritte dalla legge di potenza ("scaling behavior") (3.23) con β che assume valori compatibili con quelli previsti. I dati sperimentali mostrano chiaramente anche la validità delle previsioni espresse dalle formule (3.19) e (3.25), e cioè, rispettivamente che il potenziale di soglia decresca linearmente con le dimensioni lineari del sistema e che la conduttanza differenziale dello stesso acquisti, in opportune condizioni, una forma attivata termicamente .

CAPITOLO IV

PROPRIETA' DI TRASPORTO ELETTRONICO IN SISTEMI DISORDINATI DI NANOCRISTALLI METALLICI, ESPERIMENTI ORIGINALI

4.1 INTRODUZIONE

Questo quarto capitolo è basato sulla esposizione di dati sperimentali originali riguardanti la conduzione elettrica in sistemi di nanocristalli metallici e sulla loro interpretazione secondo le teorie esposte in particolare nel capitolo III.

Si vogliono presentare ed analizzare delle caratteristiche I-V relative ad un campione costituito da nanocristalli metallici di TiSi_2 immersi in una matrice di Si policristallino. La differenza fondamentale tra questo tipo di campione e la tipologia di campioni presenti in letteratura e presentati nell'ultima sezione del precedente capitolo sta nel fatto fondamentale che esso presenta un numero di grani molto maggiore rispetto a questi ultimi (mentre i campioni il cui studio è in genere riportato in letteratura sono costituiti da un centinaio di grani per lato, quello analizzato in questo lavoro presenta una densità di grani di circa 10^{12} grani/cm²). Quindi il sistema in analisi potrebbe apparire come un sistema estremamente più caotico di quelli presentati nella letteratura classica. Nasce, dunque, l'interessante questione di verificare se la teoria

utilizzata per spiegare le caratteristiche I-V dei campioni standard (quella esposta nei paragrafi 3.2.3 e 3.2.4) possa essere utilizzata per interpretare, ed eventualmente in che limiti, le caratteristiche I-V per il campione qui in esame.

4.2 PREPARAZIONE DEL CAMPIONE

4.2.1 DEPOSIZIONE

Il campione esaminato in questo lavoro, e denominato campione A5, è stato preparato per mezzo di deposizioni sequenziali di films di Ti e Si su uno strato di SiO_2 (fig. 4.1).

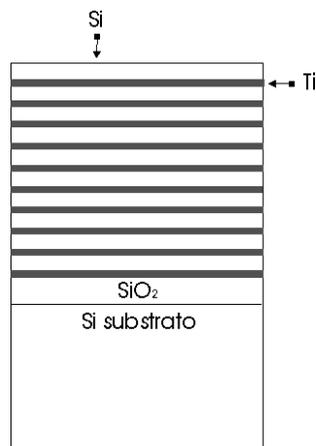


Fig.4.1 Rappresentazione schematica dei films depositati tramite PVD. [88]

I films sono stati preparati tramite deposizione fisica da fase vapore (Physical Vapor Deposition, PVD). La tecnica PVD consiste, essenzialmente, nell'evaporare l'elemento da depositare, riscaldandolo per mezzo di un fascio

elettronico, opportunamente collimato. In tale maniera, portando alla fusione l'elemento che è contenuto in un crogiuolo raffreddato ad acqua, è possibile far sì che la pressione parziale di vapore dell'elemento superi quella dell'ambiente in cui si opera. Una volta evaporati, gli atomi andranno a condensare sul substrato su cui si vuole crescere. L'evaporatore utilizzato, caratterizzato da un vuoto di base di 10^{-11} torr, si trova presso i laboratori dell'IMM-CNR e permette di depositare in condizioni di ultra alto vuoto. Tale sistema è dotato di una precamera per l'introduzione dei campioni. Nella camera di deposizione il substrato si trova in alto rispetto ai crogiuoli che contengono il materiale da evaporare. Il vuoto in camera viene fatto per mezzo di un sistema di pompaggio da ultra alto vuoto costituito da una pompa rotativa e una pompa turbo molecolare accoppiate, insieme a una pompa ionica, che permettono di raggiungere, in condizioni ottimali, un vuoto di base di $10^{-10} \div 10^{-11}$ torr. Principalmente si opera in condizioni di alto vuoto perché in questo modo si riduce il numero di impurezze presenti nell'atmosfera di lavoro, riducendo così le possibili contaminazioni del substrato. All'interno della camera di deposizione si trovano due cannoni elettronici, uno a quattro crogiuoli rotanti e l'altro a crogiuolo singolo. Ciascun crogiuolo contiene un materiale differente ed è raffreddato ad acqua. Sopra di essi è posto uno schermo in acciaio fornito di una apertura da cui le particelle evaporate fuoriescono per propagarsi verso il substrato. L'evaporazione dei diversi materiali avviene per bombardamento elettronico: un fascio di elettroni viene emesso da un filamento di tungsteno per effetto termoelettrico, con corrente di emissione di $0.03 \div 0.09$ A, ed accelerato da un potenziale di $7 \div 9$ kV.

La lettura degli spessori depositati è affidata ad un sistema di oscillatori al quarzo opportunamente tarati.

La deposizione è avvenuta a temperatura ambiente, in condizioni di vuoto di circa 3×10^{-8} torr e con una velocità di deposizione di circa $0.4 \text{ \AA}/\text{sec}$, sia per il titanio che per il silicio. La struttura a multilayer è schematizzata in figura 4.1. Sono stati depositati 10 strati di Ti ciascuno di spessore di circa 1.7 nm e 10 strati di Si ciascuno di spessore di circa 25 nm su uno strato di SiO_2 di spessore di circa 50 nm. Uno strato di Si di spessore di circa 500 Å è stato

posto a completamento della deposizione per prevenire la diffusione di impurezze provenienti dall'ambiente esterno.

Il campione così realizzato è stato poi opportunamente tagliato rendendolo di forma quadrata con lato di circa 1cm (ed il film avente spessore di circa 2500 Å come risulta da analisi RBS e confermato da analisi TEM). Inoltre per effettuare delle misure I-V sul campione sono stati realizzati dei contatti metallici (elettrodi) sugli spigoli dello stesso campione. Tali contatti sono stati realizzati depositando, tramite un evaporatore, sui quattro spigoli del campione atomi di Ti con una rate di circa un 1Å/s (e modellati tramite l'utilizzo di una opportuna maschera).

4.2.2 TRATTAMENTI TERMICI

Il campione preparato come descritto nel paragrafo precedente ha poi subito un trattamento termico (600 °C per tre minuti) utilizzando un RTA operante in atmosfera di Argon. Il campione così trattato verrà denominato campione A5 600 °C 3 min.

In seguito al trattamento termico si ottiene la formazione di grani isolati di TiSi_2 nella fase C49, dispersi in una matrice di Si policristallino come schematizzato in fig. 4.2. Inoltre, in seguito a questo trattamento termico gli atomi di Ti precedentemente depositati per formare i contatti reagiscono con il Si del campione formando uno strato di TiSi_2 che garantisce il contatto ohmico con il substrato.

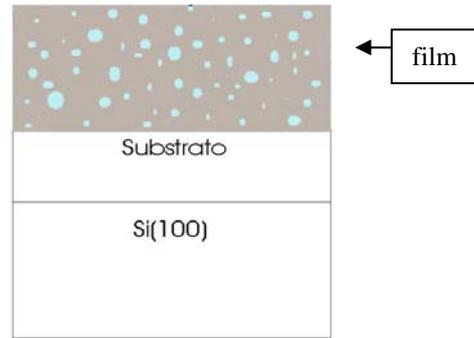


Fig.4.2 Schematizzazione del campione dopo il trattamento termico.[88]

4.2.3 CARATTERIZZAZIONE STRUTTURALE

Per caratterizzare strutturalmente il suddetto campione sono state effettuate su di esso delle analisi RBS (Rutherford Backscattering Spectrometry) e TEM (Transmission Electron Microscopy).

Uno spettro RBS relativo al campione in esame depositato, prima dei trattamenti termici è mostrato in fig.4.3. Esso è ottenuto utilizzando un fascio collimato di ioni ${}^4\text{He}^+$ da 1.7 MeV, e rivelando gli ioni retrodiffusi ad un angolo di 165° (geometria normale).

L'analisi RBS permette di determinare le concentrazioni relative di due elementi presenti in un campione. Si può mostrare che, considerati due generici elementi presenti nel campione e dette C_1 , C_2 le loro concentrazioni, Z_1 , Z_2 i rispettivi numeri atomici e Γ_1 , Γ_2 le altezze a metà altezza dei loro rispettivi segnali ottenuti tramite analisi RBS, vale la formula

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \left(\frac{Z_2}{Z_1} \right)^2 \quad (4.1).$$

In detto spettro RBS è riportato il numero di conteggi in unità arbitrarie in funzione del canale a cui, per mezzo di una precedente calibrazione con elementi noti, è assegnata una energia (circa 2.7 KeV/canale). La scala superiore riporta le energie degli ioni ${}^4\text{He}^+$ retrodiffusi dopo la collisione con gli ioni del materiale. Nello spettro riportato è possibile distinguere nell'intorno del canale 369, corrispondente a 1.22 MeV, il segnale del Titanio mentre pressappoco al canale 282 (0.967 MeV) è posto quello del Si insieme al Ti nel film. Per via della struttura a multistrato il segnale del silicio è quello del silicio in superficie, mentre ciò non è vero nel caso del Titanio, e quindi il suo segnale è ad una energia minore che se fosse in superficie, poiché nell'attraversare lo strato sovrastante ha perduto energia ulteriore. Il picco a circa 122 canali (0.522 MeV) dipende dall'ossigeno presente nell'ossido di Si su cui è stato cresciuto lo strato di silicio policristallino e il film. Inoltre altre considerazioni basate sul calcolo delle concentrazioni tramite la formula (4.1) indicano che intorno al canale 167 (0.632 MeV) si trova un picco (non risolto dalla misura riportata nello spettro) dovuto all'ossigeno di superficie.

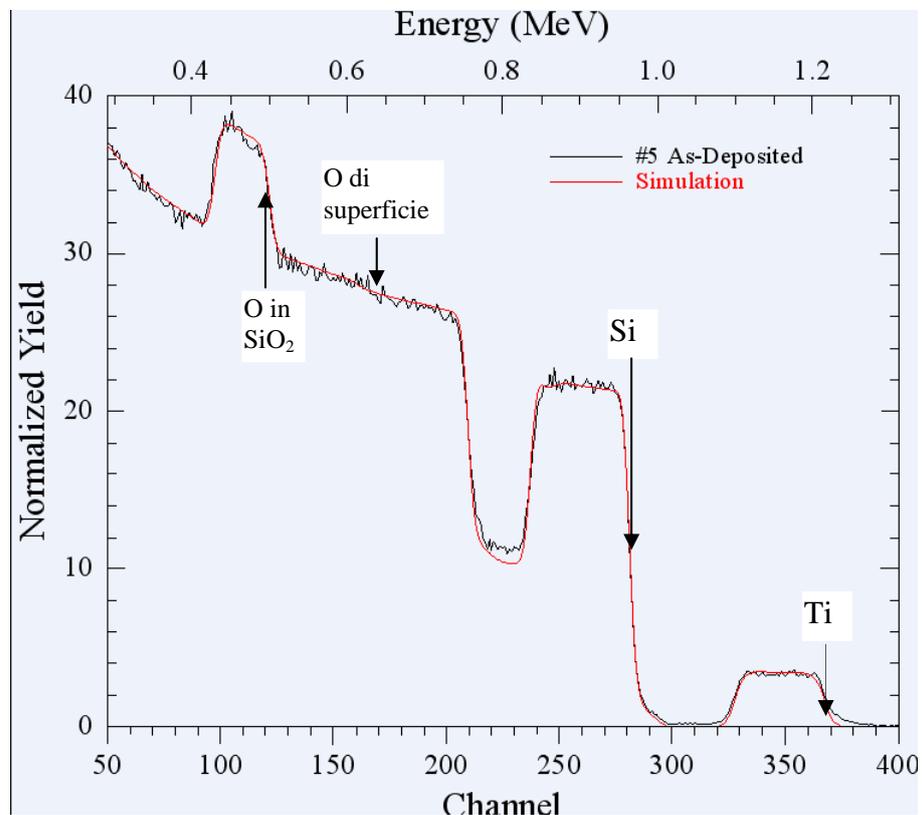


Fig.4.3 Spettro RBS relativo al campione in esame. La simulazione (in rosso) è ottenuta utilizzando le quantità di 5.8% per il Ti, 89.2% per il Si, 5% di O di superficie.

L'analisi RBS permette di determinare le concentrazioni relative di ossigeno di superficie, silicio e titanio presenti nel campione rispettivamente in 5%, 5.8%, 89.2%.

Si osservi inoltre che l'analisi RBS ha permesso di determinare lo spessore del film in circa 2500 Å.

La microscopia elettronica TEM utilizzata per la caratterizzazione strutturale del campione utilizza un fascio elettronico con energia di circa 200 KeV, per generare le immagini del materiale d'interesse, che è stato assottigliato per permettere la diffrazione del fascio elettronico trasmesso.

In generale è possibile analizzare il campione in due differenti maniere: preparandolo in modo da analizzarlo planarmente, cioè in modo che il fascio lo attraversi nelle direzione ortogonale alla sua superficie (Plan-View) o trasversalmente, con il fascio che lo attraversa in direzione longitudinale alla sua superficie (Cross-View). Le informazioni ottenibili dalle due configurazioni di analisi sono complementari.

Le analisi riportate in questo lavoro di tesi sono state ottenute utilizzando il microscopio Jeol 2010F ad emissione di campo (FEG, Field Emission Gun) installato all'IMM-CNR di Catania.

Con il microscopio elettronico è possibile visualizzare la figura di diffrazione del fascio trasmesso o l'immagine ricostruita in campo chiaro (Bright-Field), o in campo scuro (Dark-Field).

L'immagine in Bright-Field viene generata utilizzando il fascio trasmesso (selezionato per mezzo di una fenditura), cosicché tutte le regioni del campione che sono in condizione di diffrazione appariranno come zone scure poiché gli elettroni provenienti da quelle regioni sono bloccati dalla fenditura.

L'altro modo operativo è in Dark-Field in cui si seleziona, per mezzo della fenditura, uno dei fasci diffratti. In tale modalità saranno illuminate, nell'immagine ricostruita, solo quelle regioni orientate in maniera da generare il fascio diffratto di elettroni che attraversa la fenditura. Per ottenere delle immagine significative dei precipitati si è utilizzato il microscopio con filtro in energia. Questo consente una elevata stabilità del fascio elettronico ed è equipaggiato con un Gatan Image Filtering System (GIF system), che permette di selezionare l'energia degli elettroni trasmessi in maniera da

generare l'immagine utilizzando solo quegli elettroni che hanno subito perdite energetiche a causa dell'interazione con il materiale del campione. Poiché l'energia ceduta dipende dall'atomo con cui gli elettroni hanno interagito, si può, selezionando opportunamente una parte dello spettro elettronico per mezzo di una finestra di 5 eV di larghezza, ottenere una mappa elementale del campione. In generale un TEM equipaggiato con un sistema, che permette di fare analisi EELS (Electron Energy Loss Spectroscopy), può essere schematizzato come in Fig. 4.4.

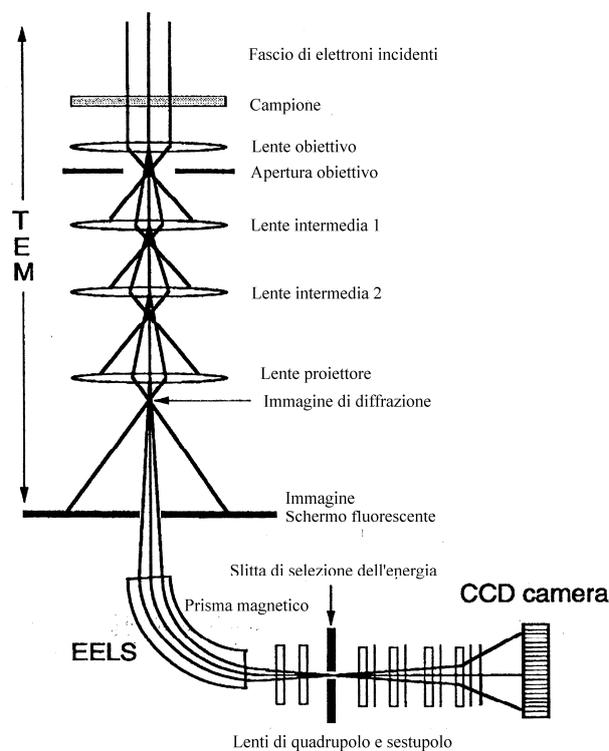


Fig.4.4 Rappresentazione schematica del funzionamento di un TEM equipaggiato con un Gatan Imaging Filter.[88]

Il funzionamento è quello di un normale TEM fino alla zona dello schermo fluorescente.

Al microscopio è poi integrato un sistema filtrante che consente, mediante uno prisma magnetico, di analizzare la distribuzione in energia del fascio trasmesso, selezionando elettroni di una opportuna energia dal fascio (parte inferiore delle Fig. 4.4). Una simile tecnica, denominata EELS, se integrata

con una telecamera CCD (Charge Coupled Devices) consente di ricostruire la mappa degli elementi presenti nel campione.

Lo spettro in energia delle perdite elettroniche è simile a quello in Fig. 4.5(a) e (b) (che è del TiO_2), in cui sono riportati il numero di conteggi in ordinate e la perdita energetica in ascissa.

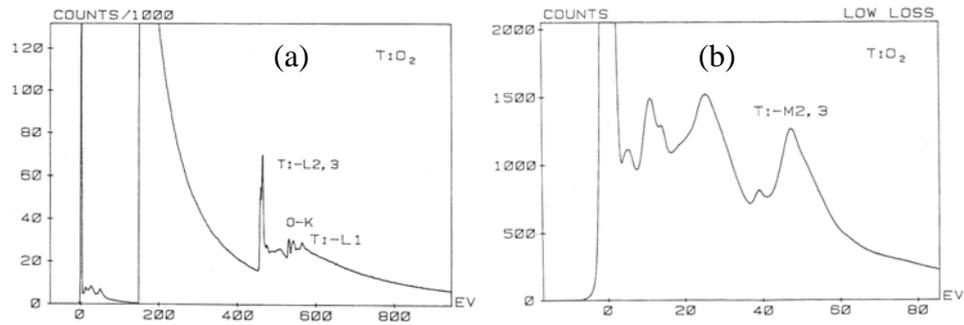


Fig.4.5 (a) Spettro EELS del TiO_2 . La regione da 0 a 80 eV (b) deve la sua forma alle interazioni con i plasmoni e con elettroni di livelli poco profondi (picco M).[88]

Il valore di perdita energetica 0, comunemente detta "0-loss", è quello della quasi totalità del fascio trasmesso. La prima regione che presenta dei picchi nello spettro, la più vicina al picco di 0-Loss, è dovuta alle interazioni degli elettroni del fascio con i plasmoni del materiale. Nel caso dei metalli i plasmoni sono ben approssimati dal modello ad elettroni liberi e si dimostra

che la frequenza di eccitazione di plasma è $\omega_{plasma} = e \cdot \left(\frac{n_e}{m_0 \epsilon_0 \epsilon} \right)^{\frac{1}{2}}$ [1], dove e è

la carica dell'elettrone, n_e è la densità di elettroni liberi, m_0 la massa a riposo dell'elettrone ed ϵ la costante dielettrica del materiale. Quindi la perdita energetica del fascio trasmesso dipenderà dalla concentrazione di elettroni nel metallo.

Per i semiconduttori, invece, la perdita energetica del fascio nella regione da 1 a 50 eV, dipende dagli elettroni di valenza che vengono promossi da questa banda a quella di conduzione. Questo processo è il risultato di una eccitazione collettiva del solido ed è strettamente correlato con la struttura elettronica del materiale.

A più alte energie, le interazioni, che gli elettroni del fascio subiscono, coinvolgono le eccitazioni degli orbitali elettronici degli atomi del campione, di modo che compariranno nello spettro i vari picchi corrispondenti ai livelli energetici elettronici M, L, degli atomi di cui è costituito del materiale.

Le immagini che si ottengono per mezzo delle due tecniche combinate TEM e EELS, potendo pure disporre di un sistema adeguato di filtri e risoluzione digitale, sono sorprendentemente nitide e contengono un numero maggiore di informazioni significative, sia riguardanti la struttura che la composizione, che viene determinata con la risoluzione spaziale della microscopia elettronica.

Le TEM seguenti si riferiscono al campione che ha subito il trattamento termico a 600 °C per tre minuti e sono state ottenute dalle analisi TEM effettuate come poco sopra illustrato.

La fig.4.6 mostra una comune immagine in campo chiaro e planare ottenuta del campione la cui definizione risulta molto buona grazie al sistema di filtri. I grani di TiSi_2 sono ben visibili (macchie scure) e la modalità di funzionamento EFTEM elimina gran parte del contributo degli scattering secondari, mostrando il Si policristallino come un fondo diffuso.

Andando a selezionare le varie regioni dello spettro energetico, si individua la distribuzione spaziale dei vari elementi presenti nel campione. Operando in tal modo, ossia creando una immagine TEM per ogni picco energetico di interesse dello spettro EELS si ottengono varie mappe della stessa area e ognuna di queste contiene informazioni sull'elemento o sul composto corrispondente a quella particolare perdita energetica subita dal fascio incidente.

A circa 16 eV corrisponde l'energia di interazione degli elettroni del fascio con i plasmoni del silicio puro e non di quello legato con il titanio. Così la fig.4.7 riporta una immagine planare ottenuta selezionando gli elettroni che hanno perso 16 eV rispetto al fascio trasmesso: i grani scuri sono quelli di TiSi_2 , come indicato da altre analisi, mentre tutto ciò che appare illuminato è Si.

Selezionando energie intorno a 45 eV si rivela la edge M del Ti (la soglia energetica corrisponde al livello M degli stati elettronici del Ti). Producendo una immagine TEM planare (fig.4.8) a partire dagli elettroni che hanno subito questa perdita energetica nell'attraversare il campione si ottiene una immagine

in cui i grani, per via del titanio che vi è contenuto, sono chiari mentre il silicio policristallino della matrice ha un segnale assai debole, dato che la sua energia di interazione (16 eV) è molto lontana dai 45 eV che si sono selezionati.

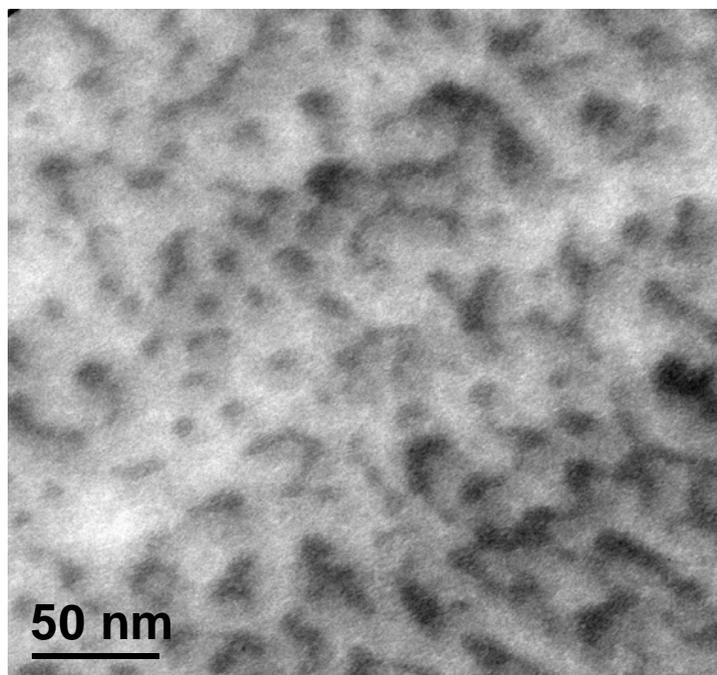


Fig.4.6 TEM planare in campo chiaro del campione A5 600 °C 3min.

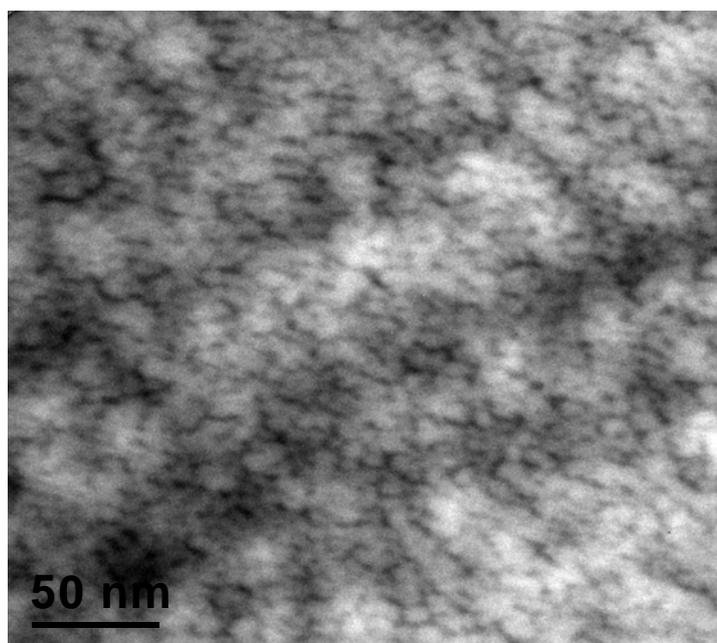


Fig.4.7 TEM planare, del campione A5 600 °C 3min., in modalità energy-filter ottenuta selezionando gli elettroni che hanno perso 16 eV rispetto al fascio trasmesso. Le zone chiare sono quelle in cui è presente il Si e quelle scure quelle in cui è presente il Ti.

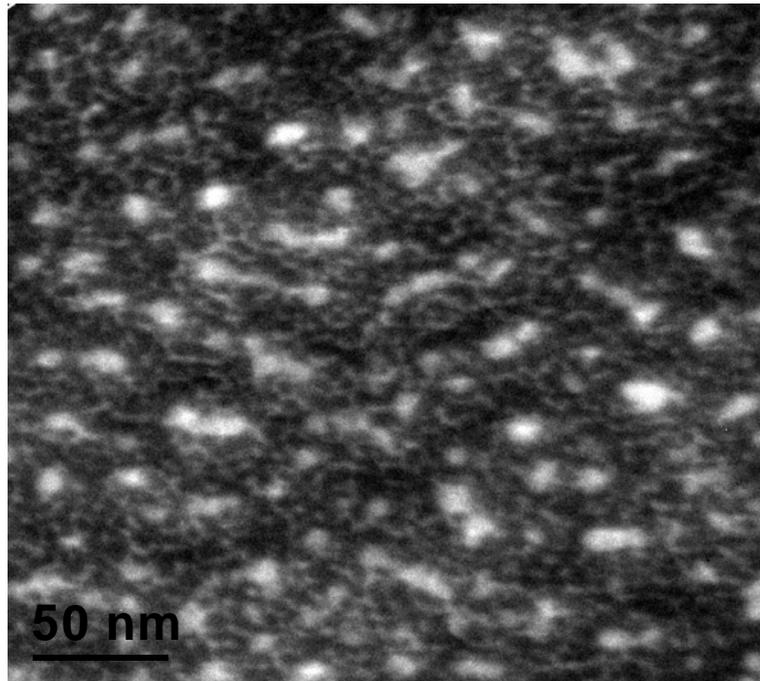


Fig.4.8 TEM planare, del campione A5 600 °C 3min., in modalità energy-filter ottenuta selezionando gli elettroni che hanno perso 45 eV (Edge M del Ti) rispetto al fascio trasmesso. Le zone chiare indicano le zone in cui è presente il Ti, e le zone scure quelle in cui è presente il Si.

Le figure 4.9, 4.10, 4.11 mostrano delle immagini TEM ottenute come in precedenza descritto ma in questo caso mostranti la sezione trasversale del campione.

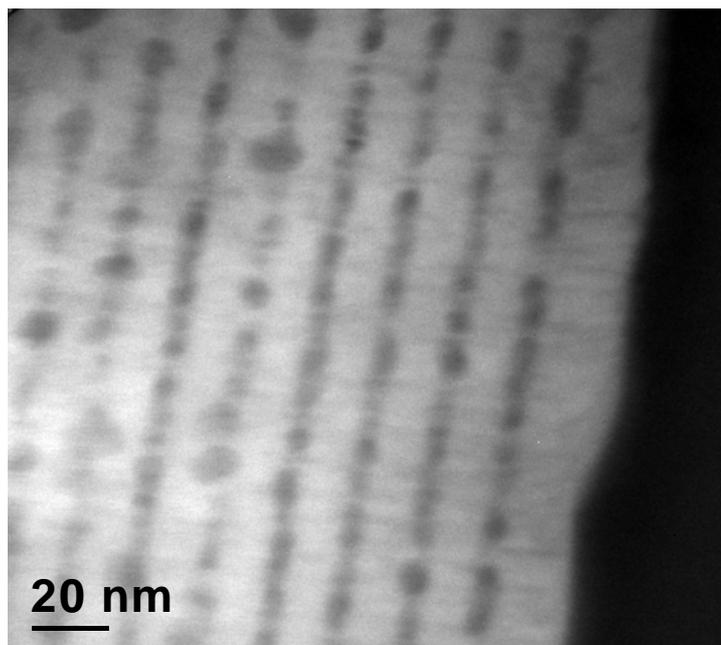


Fig.4.9 TEM in cross, del campione A5 600 °C 3min., ed in modalità energy-filter ottenuta selezionando gli elettroni che hanno perso 16 eV rispetto al fascio trasmesso. Le zone chiare indicano le zone in cui è presente il Si e quelle più scure le zone in cui è presente il Ti.

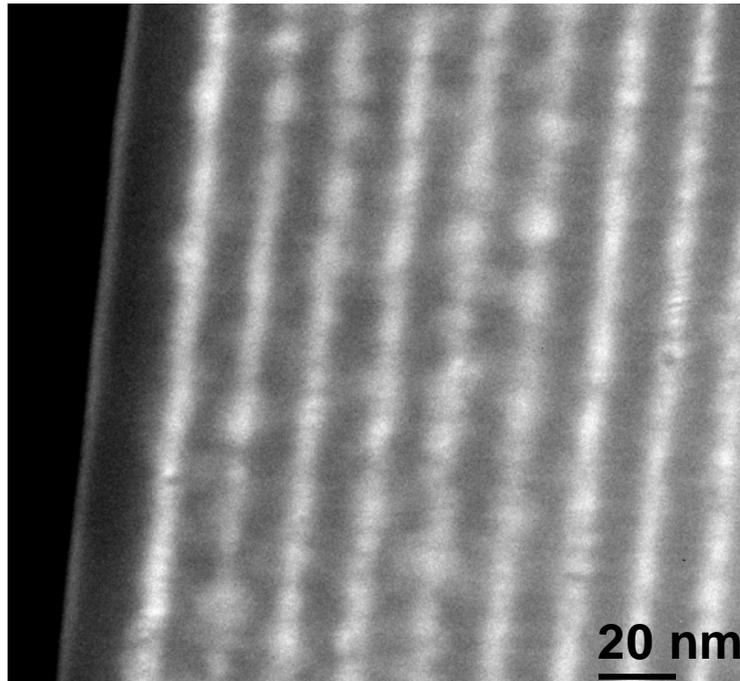


Fig.4.10 Tem in cross, del campione A5 600 °C 3min., ed in modalità energy-filter ottenuta selezionando gli elettroni che hanno perso 45 eV rispetto al fascio trasmesso. Le zone chiare indicano le zone in cui è presente il Ti e quelle scure le zone in cui è presente il Si

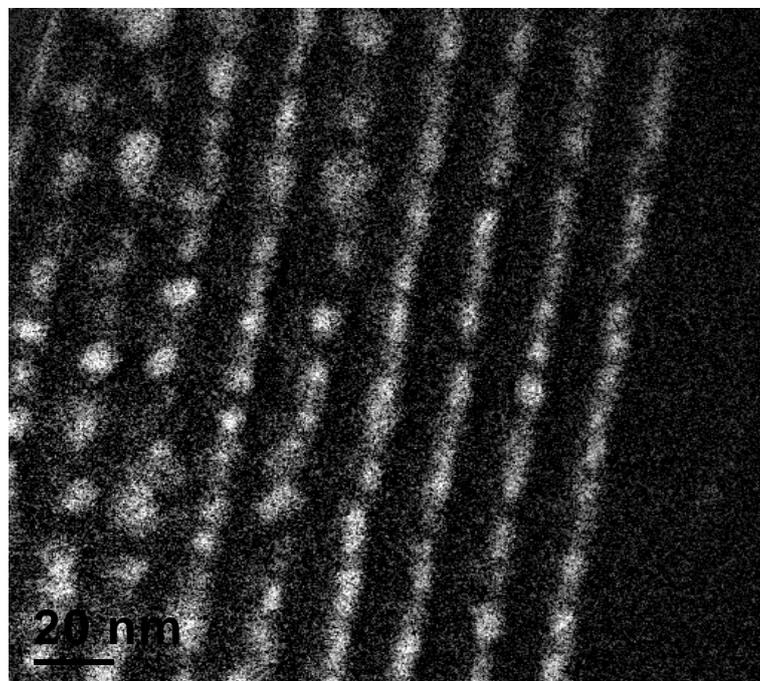


Fig.4.11 TEM in cross, del campione A5 600 °C 3min., ed in modalità energy-filter che mostra una mappa chimica del Ti presente nel campione ottenuta selezionando gli elettroni che hanno perso circa 456 eV (Edge L del Ti) rispetto al fascio trasmesso.

Dalle TEM in cross si può facilmente notare che i grani di TiSi_2 generatisi in conseguenza al trattamento termico sono disposti lungo dei piani ben determinati e mantengono, quindi, un forte “ricordo” della iniziale struttura a multilayer del campione.

Analizzando diverse immagini TEM planari e cross del campione si è potuta determinare la distribuzione in taglia dei grani, calcolando per mezzo di un opportuno software le varie aree delle proiezioni bidimensionali dei grani. La figura 4.12 riporta la distribuzione in taglia dei grani determinata dall’analisi delle TEM planari e la 4.13 riporta la distribuzione in taglia dei grani determinata dall’analisi delle TEM in cross. Si sono utilizzate sia le immagini planari che in cross per una determinazione più accurata del raggio medio dei grani (si noti che le analisi delle TEM hanno il seguente difetto: dato che ciò che si analizzano sono le proiezioni bidimensionali dei grani non è possibile distinguere se una determinata proiezione sia dovuta ad un singolo grano o a più grani che si trovano su piani differenti e poco spostati l’uno rispetto all’altro. Per limitare il più possibile tale fattore le analisi TEM sono state effettuate su zone molto sottili del campione).

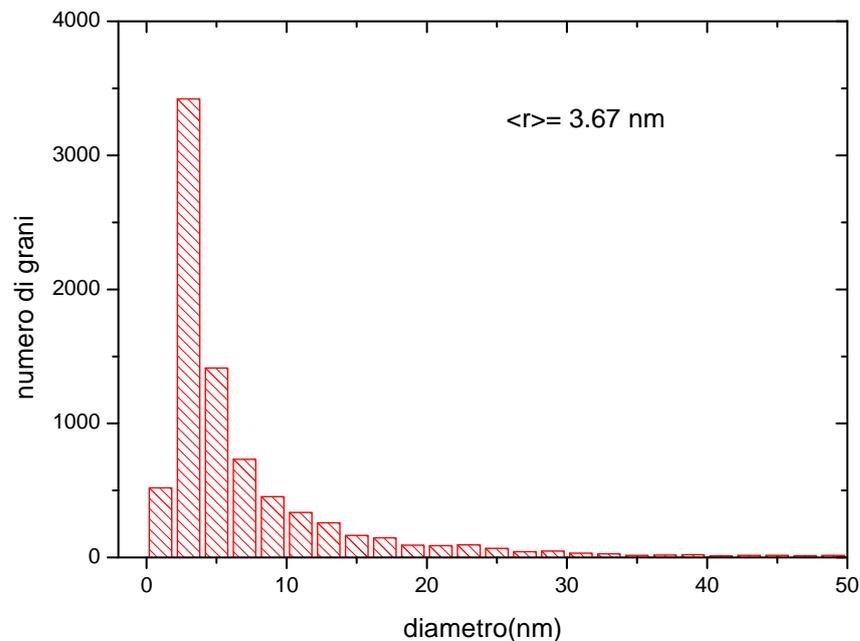


Fig.4.12 Distribuzione in taglia dei grani del campione A5 600 °C 3min. determinata dall’analisi delle TEM planari. Il diametro medio che ne risulta è $\langle d \rangle \approx 7.34 \text{ nm}$ e quindi il raggio medio è $\langle r \rangle \approx 3.67 \text{ nm}$.

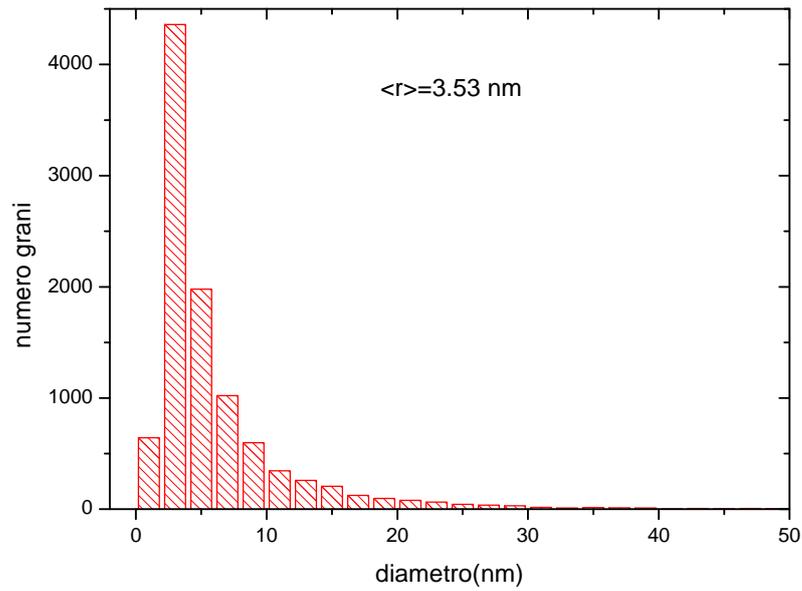


Fig.4.13 Distribuzione in taglia dei grani del campione A5 600 °C 3min. determinata dall'analisi delle TEM in cross. Il diametro medio che ne risulta è $\langle d \rangle \approx 7.06 \text{ nm}$ e quindi il raggio medio è $\langle r \rangle \approx 3.53 \text{ nm}$.

Mettendo insieme i dati relativi alle analisi delle immagini TEM planari ed in cross si ottiene la distribuzione in taglia mostrata in fig 4.14.

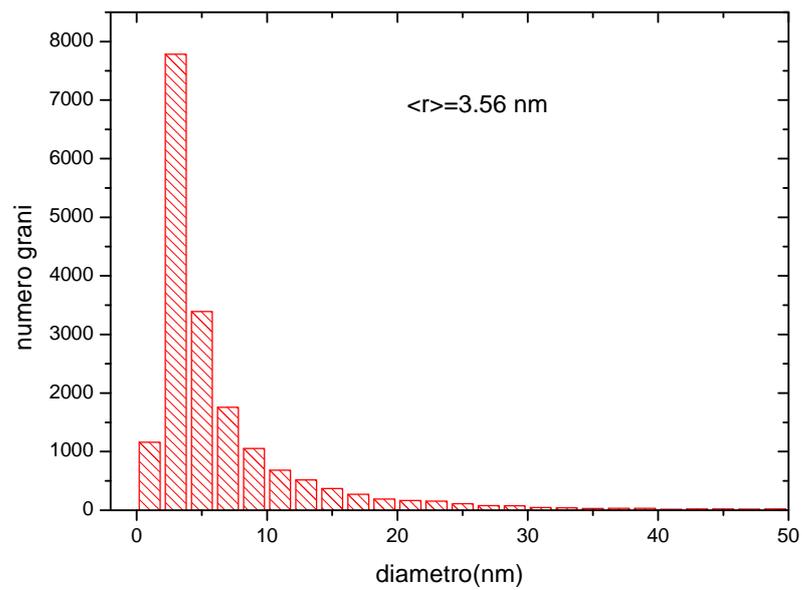


Fig.4.14 Distribuzione in taglia dei grani del campione A5 600 °C 3min. determinata dall'analisi sia delle TEM in plan che in cross. Il diametro medio che ne risulta è $\langle d \rangle \approx 7.12 \text{ nm}$ e quindi il raggio medio è $\langle r \rangle \approx 3.56 \text{ nm}$.

Il raggio medio che ne risulta è di circa 3.56 nm.

A partire dalla distribuzione in taglia dei grani riportata in figura 4.14 è possibile derivare delle distribuzioni in distanza superficie-superficie tra i grani primi vicini. Se si assume una distribuzione omogenea dei grani nel film e la distribuzione in taglia suddetta è possibile ricavare il grafico di fig.4.15 tramite un opportuno software. Tale software opera sostanzialmente nel modo seguente: esso assume, innanzitutto, che tutto il Ti presente nel campione si sia agglomerato in grani di TiSi_2 e che questi grani siano distribuiti, in ogni layer, in modo omogeneo e regolare in un opportuno reticolo di costante reticolare a . Esso, poi, calcola la probabilità $p(d_1)$ che in una determinata posizione reticolare si trovi un grano di diametro d_1 e la probabilità $p(d_2)$ che un grano di diametro d_2 sia a distanza a dal precedente. Infine dalla distribuzione delle probabilità $p(d_1)$ e $p(d_2)$ riesce a derivare la distribuzione delle distanze superficie-superficie tra i grani.

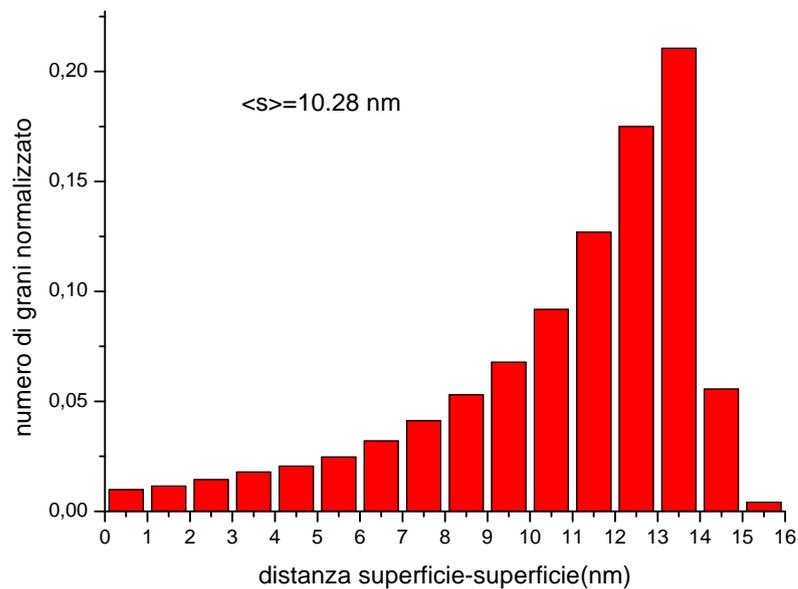


Fig.4.15 Distribuzione della distanza tra le superfici dei grani del campione A5 600 °C 3min. La distanza media superficie-superficie che ne risulta è di circa 10.28 nm.

Da questa ultima distribuzione si desume che la distanza media superficie-superficie tra un grano e l'altro è di circa 10.28 nm.

Inoltre conosciuto il raggio dei grani e lo spessore del film la densità dei grani presenti nel film è stata stimata secondo il metodo descritto nella appendice C: tale stima dà una densità di circa 10^{12} grani/cm².

4.3 CARATTERISTICHE I-V DEL CAMPIONE

La schematizzazione di come sono state effettuate le misure I-V sul campione è riportata in figura 4.16

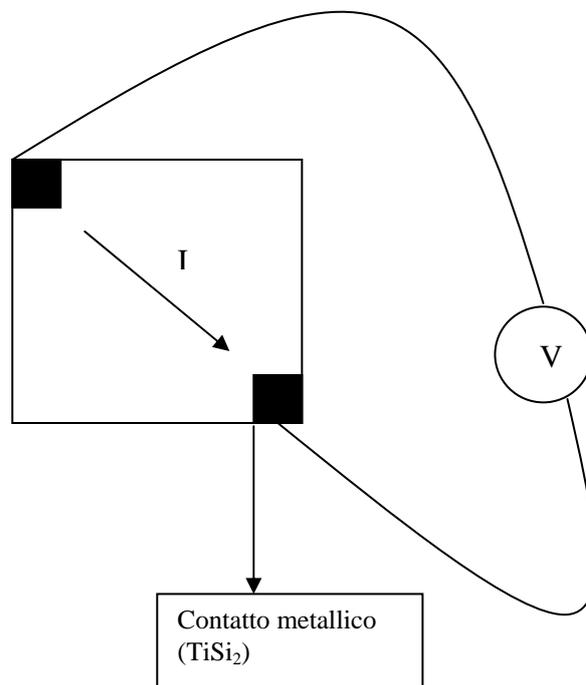


Fig.4.16 Schematizzazione di come sono state effettuate le misure sul campione.

Le misure sono state effettuate a diverse temperature per indagare il comportamento delle suddette caratteristiche al variare della temperatura.

Il sistema che permette il raffreddamento del campione è mostrato in figura 4.17. Esso funziona con un criostato a flusso continuo (la cui sezione è mostrata in figura 4.18) in cui il flusso di gas criogenico (azoto), che fluisce attraverso uno scambiatore di calore e per il vano porta-campione, raffreddando direttamente il campione, è comandato da un controller di temperatura. Tale controller consente di regolare la potenza dissipata da un riscaldatore, agendo sulla tensione, e comanda una valvola elettromeccanica situata nel tubo di trasferimento per l'azoto, regolando il flusso di liquido criogenico. Quest'ultimo è aspirato nel criostato per mezzo di una pompa a diaframma e da un controller di flusso di gas completamente meccanico. Il flusso continuo, prodotto dalla depressione di circa 200 mbar, permette di raggiungere nel criostato temperature al di sotto del punto di liquefazione del mezzo criogenico ($T < 77\text{K}$). La misura della temperatura avviene per mezzo di due termocoppie: una solidale con il campione e l'altra con il criostato, entrambe in AuFe con riferimento a 77K in bagno di N_2 liquido. Il tutto è interfacciato con un calcolatore. Il porta-campioni è costituito da Cu privo di ossigeno ed il campione è sostenuto da quattro mollette di rame che costituiscono anche le punte per la misura.

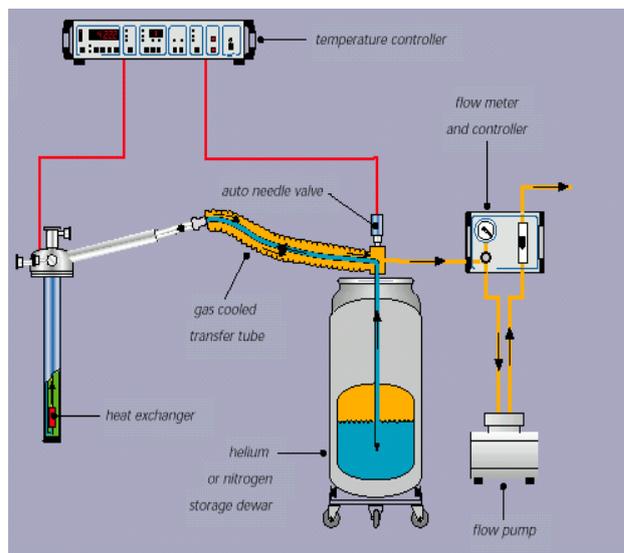


Fig.4.17 Sistema di raffreddamento criogenico con criostato, tubo di trasferimento, dewar e apparati di controllo del flusso e della temperatura. Sono mostrate le connessioni tra le varie componenti e il percorso del liquido criogenico (in azzurro) che entra nel criostato e del gas (in giallo) che esce.[88]

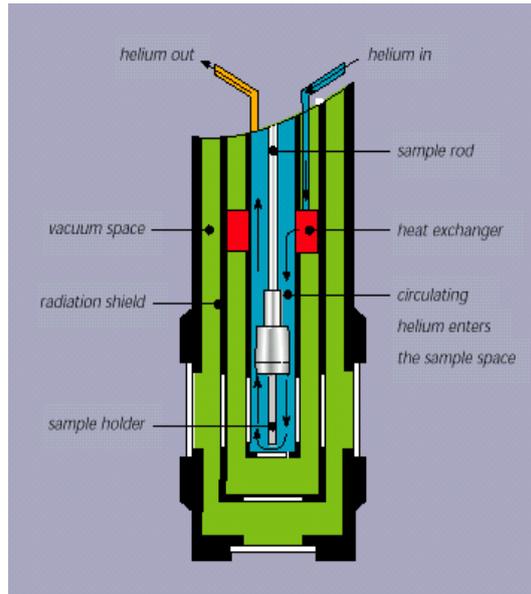


Fig.4.18 Particolare del criostato con il liquido criogenico che circola raffreddando il campione.[88]

Ad ogni fissata temperatura le caratteristiche I-V sono state misurate utilizzando un Keithley 2410 1100V.

Alcune misure, per differenti temperature sono riportate in fig.4.19. Delle evidenti osservazioni su tali caratteristiche sono le seguenti:

Per ogni fissata temperatura la caratteristica I-V presenta un chiaro potenziale di soglia per la conduzione caratteristico di una conduzione che presenti il fenomeno di Coulomb blockade. A tutte le temperature le caratteristiche sono altamente simmetriche rispetto alla inversione di potenziale. È evidente che l'effetto dell'aumento della temperatura è quello di far diminuire il potenziale di soglia: all'aumentare della temperatura le caratteristiche aumentano la loro linearità.

Si osservi, inoltre, che da tali dati sperimentali si può stimare una resistenza tra $10^6 \Omega$ (a $T \sim 70 \text{ K}$) e $10^4 \Omega$ (a $T \sim 200 \text{ K}$).

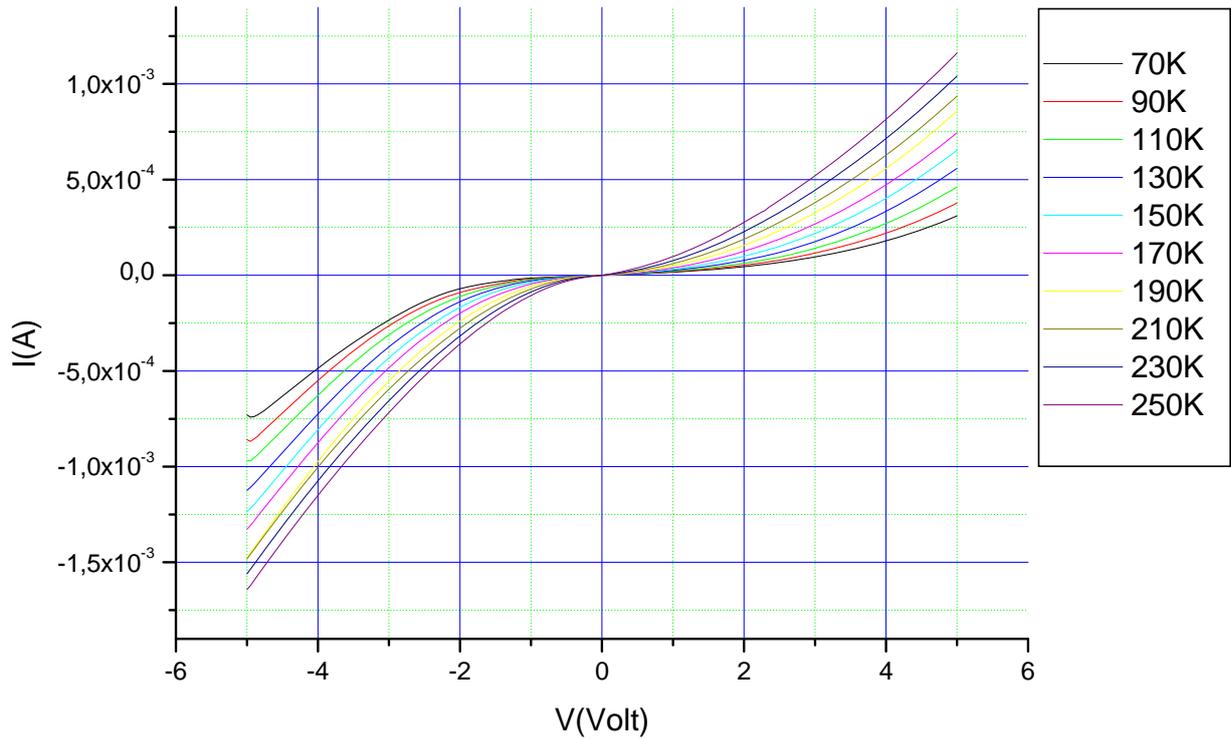


Fig.4.19 Caratteristiche I-V per il campione A5 600 °C 3min. a differenti temperature con evidenziata la simmetria rispetto all'inversione di potenziale.

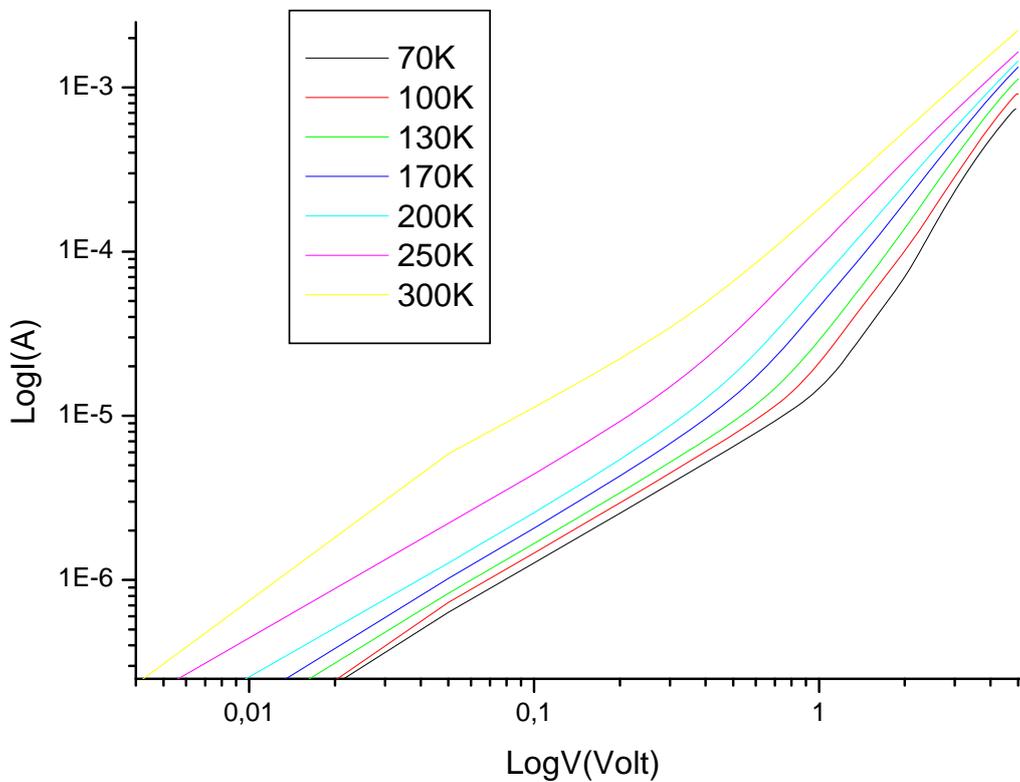


Fig.4.20 Alcune caratteristiche I-V (rami positivi) per il campione A5 600 °C 3 min. a varie temperature, in scala logaritmica.

4.4 ANALISI DEI DATI ALLA LUCE DEI MODELLI TEORICI SVILUPPATI

Le caratteristiche I-V ottenute per il campione in esame e mostrate in fig.4.19 sembrerebbero compatibili con quelle previste dalla teoria esposta nel capitolo III. Si procede, dunque, ad una analisi più approfondita di tali dati alla luce della suddetta teoria.

Innanzitutto si può osservare che i dati ottenuti relativamente alla caratterizzazione strutturale del campione A5 600 °C 3min. permettono di stimare le seguenti quantità:

- capacità media del singolo grano: $C_0 = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \langle r \rangle \approx 4.71 \times 10^{-18}$ F (avendo supposto il grano di forma sferica ed avendo preso come costante dielettrica relativa del silicio policristallino $\epsilon = 11.9$);
- capacità di accoppiamento media tra due grani primi vicini: $C \approx 1.30 \times 10^{-18}$ F (è stata stimata come la capacità di un condensatore piano di superficie pari $(2\langle r \rangle)^2$ e distanza tra i piatti pari a $\langle s \rangle$ con dielettrico il silicio policristallino);
- energia media di carica del singolo grano: $E_C = e^2/2C_0 \approx 17$ meV;
- $e^2/2k_B \max(C_0, C) \approx 197$ K.
- lunghezza di schermaggio: $\Lambda = \left(\frac{C}{C_0}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.53$ (per cui le caratteristiche I-V relative al campione in esame non dovrebbero presentare fenomeni di isteresi).
- Inoltre la resistenza differenziale stimata dalle caratteristiche I-V in $10^4 \div 10^6 \Omega$ può essere intesa come la resistenza di tunnelling

incontrata dagli elettroni nell'operare processi di tunnelling da un grano all'altro, ed essa risulta, come richiesto dal modello di Middleton e Wingreen, sensibilmente più grande del quanto di resistenza (pari a circa 25.8 k Ω).

Si inizi a considerare una delle caratteristiche I-V del campione, ad esempio quella a 70K. Si può osservare che il fit del ramo positivo di tale caratteristica con la funzione $I = A(V - V_t)^\beta$, prevista dal modello di Middleton e Wingreen, nei tre parametri A, V_t , β è poco indicativo. Infatti è possibile determinare terne di numeri molto differenti che fittino altrettanto bene questa caratteristica (che determinano, cioè, un χ minimo egualmente piccolo), come mostrato nelle figure 4.21 e 4.22 (in altri termini la funzione suddetta nei tre parametri suddetti assume molti minimi differenti).

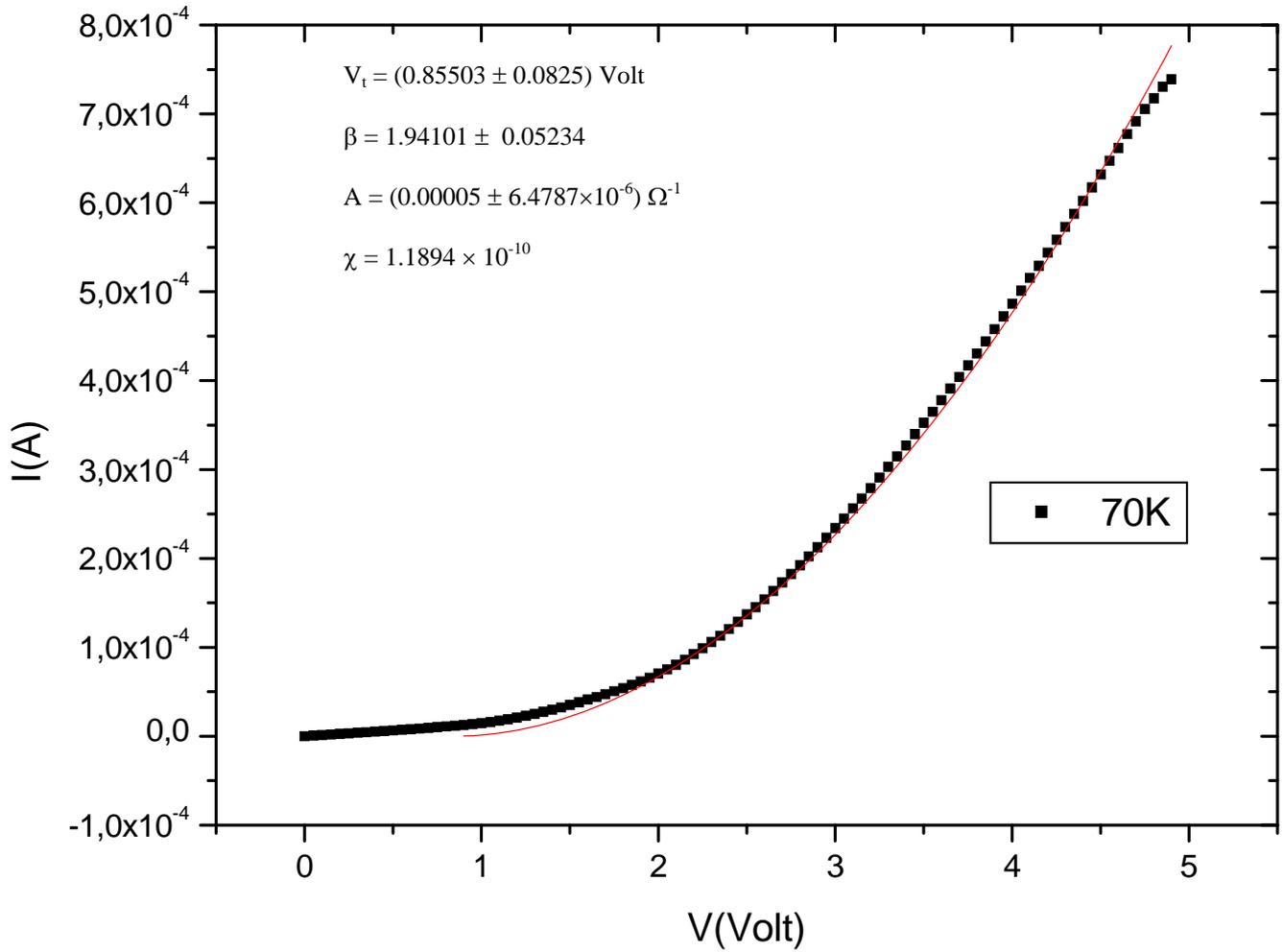


Fig.4.21 Fit del ramo positivo della caratteristica I-V del campione A5 600 °C 3min. a 70K tramite la funzione $I = A(V - V_t)^\beta$ in una terna di parametri A, V_t , β . I punti in nero indicano i dati sperimentali e la curva in rosso il fit.

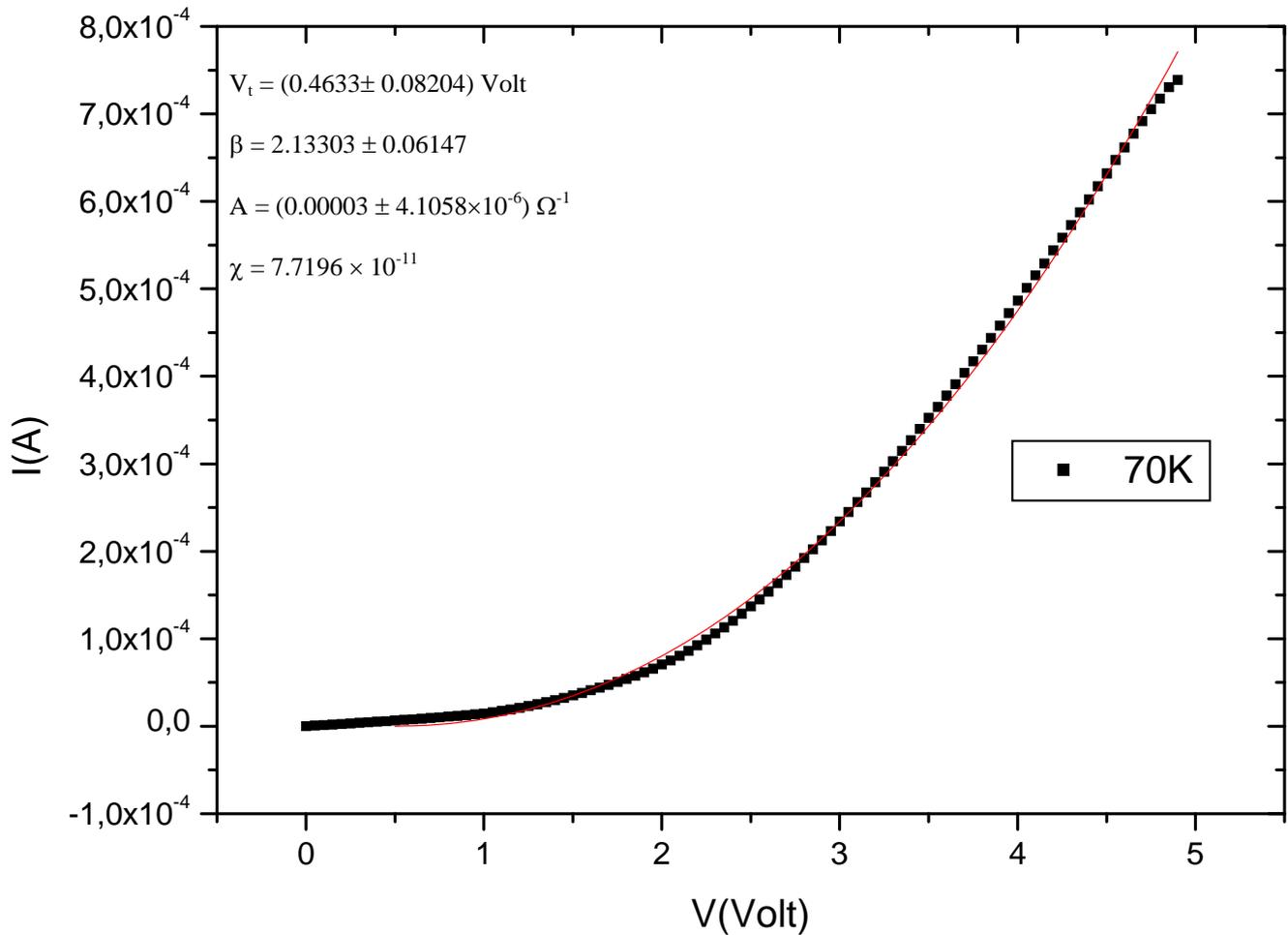


Fig.4.22 Fit del ramo positivo della caratteristica I-V del campione A5 600 °C 3min. a 70K tramite la funzione $I = A(V-V_t)^\beta$ con una terna di parametri diversa da quella utilizza nella figura precedente. I punti in nero indicano i dati sperimentali e la curva in rosso il fit.

Dato che il fit dei dati sperimentali tramite la funzione di cui detto nei parametri A , V_t , β risulta poco indicativo per quanto detto è, allora, opportuno trovare un metodo indipendente per determinare primariamente almeno uno di questi tre parametri e poi eseguire il fit nei due parametri restanti. Questo metodo permette di determinare una delle terne di parametri più vicina alla migliore.

Un metodo alternativo per poter determinare il potenziale di soglia V_t in modo indipendente dagli altri due parametri è il seguente:

Si osservi che dalla relazione $I = A(V-V_t)^\beta$ si ricava $I \frac{dV}{dI} = \frac{1}{\beta}(V - V_t)$ che in un plot $(V, IdV/dI)$ non è altro una retta la cui intersezione con l'asse dei potenziali è proprio V_t . Dunque, plottando i dati sperimentali $(V, IdV/dI)$ e cercando il fit lineare migliore di tali dati si può ricavare V_t (in pratica, si è proceduto ad una serie di tentativi variando l'intervallo di punti su cui è stato effettuato il fit lineare e considerando come fit migliore, tra quelli considerati, quello con errori relativi minori sui parametri dei fits. Naturalmente esso non è il fit migliore in assoluto ma permette comunque una accurata stima di V_t). Ciò, viene mostrato per il ramo positivo della caratteristica a 70K del campione in esame nella fig.4.23.

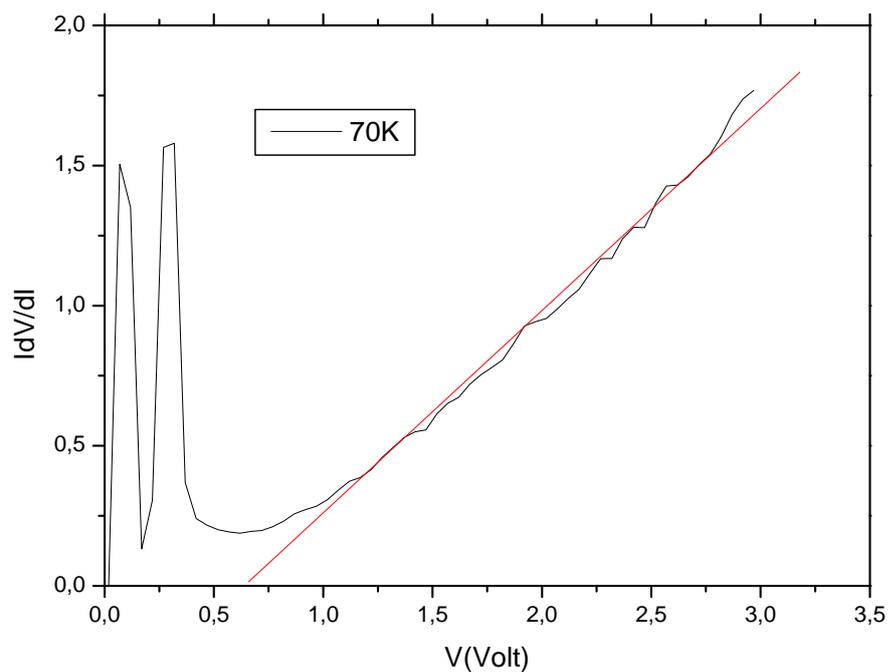


Fig.4.23 Plot dei dati sperimentali $(V, IdV/dI)$ per il ramo positivo della caratteristica I-V a 70K del campione A5 600 °C 3min. con relativo fit lineare in una opportuna regione di punti.

La procedura di cui detto, permette di stimare $V_t(70K) = (0.65077 \pm 0.06623)$ Volt.

In fig.4.24 vengono mostrati i dati sperimentali I-V relativi al campione a 70K fittati con la funzione $I = A(V-V_t)^\beta$, avendo fissato V_t determinato come poco sopra detto, e quindi nei soli parametri A e β .

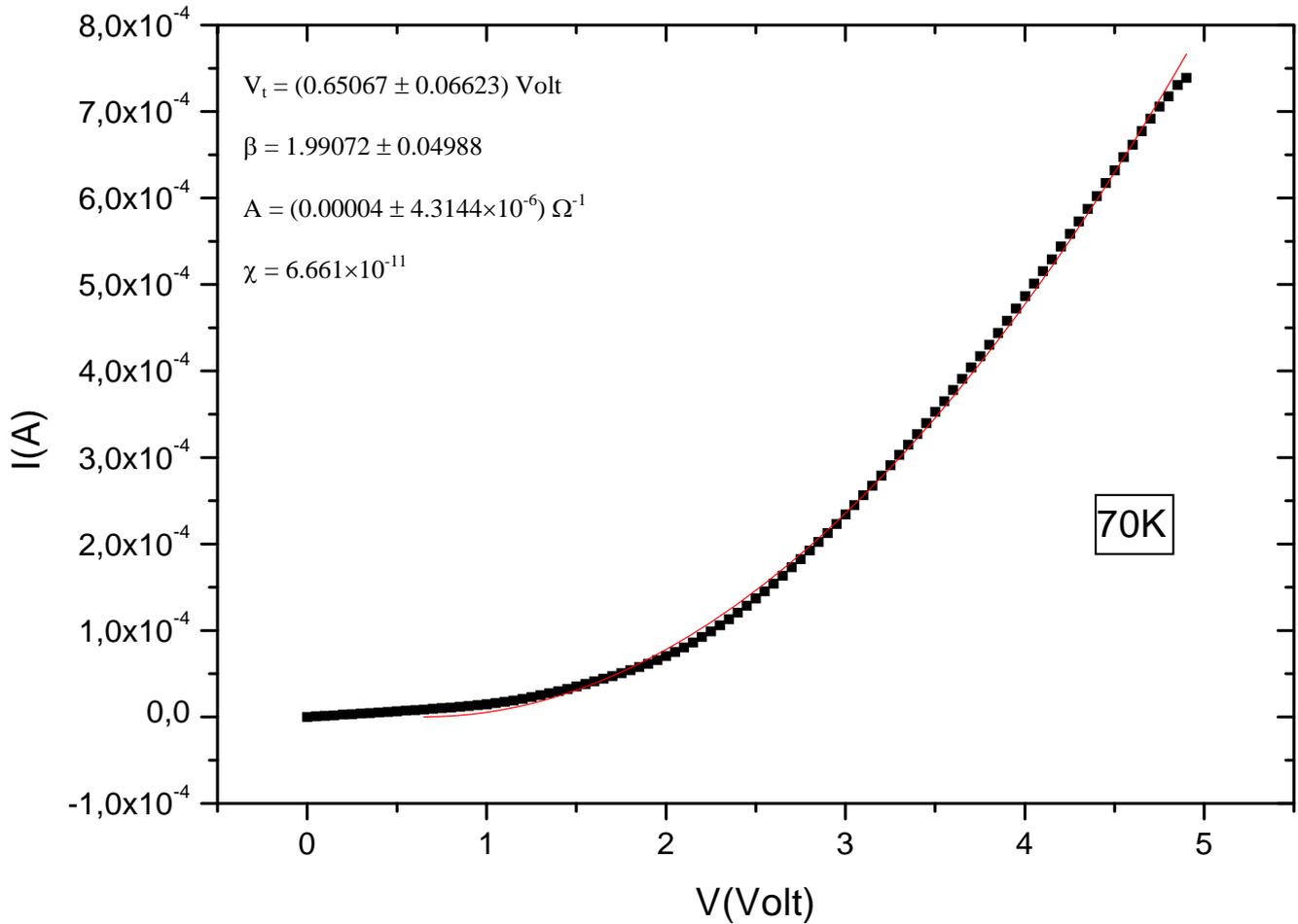


Fig.4.24 Ramo positivo della caratteristica I-V del campione A5 600 °C 3min. a 70K. I punti in nero indicano i dati sperimentali e la curva in rosso il fit.

Procedendo in modo del tutto analogo a quello che si è descritto per la determinazione del potenziale di soglia a 70K si sono determinati i potenziali di soglia ad altre temperature. Questi sono raccolti nella tabella 1.

T(K)	V_t (Volt)
70	0.65067 ± 0.06623
80	0.55066 ± 0.06198
90	0.49764 ± 0.07014
100	0.45053 ± 0.06251
110	0.40063 ± 0.07406
120	0.35040 ± 0.05289
130	0.30048 ± 0.05054
140	0.25027 ± 0.04838
150	0.20032 ± 0.04661
160	0.15006 ± 0.04348
170	0.10017 ± 0.04102

Tab.1 Potenziali di soglia per il campione A5 600 °C 3min. a varie temperature.

Di conseguenza si è proceduto al fit delle caratteristiche I-V del sistema per tutta una serie di temperature con la solita funzione $I = A(V-V_t)^\beta$ nei due parametri A e β cercando , in ogni caso, attraverso tentativi successivi di determinare un fit il più soddisfacente possibile.

Di seguito sono riportate alcune delle caratteristiche I-V del campione, al variare della temperatura, con i relativi fits e quindi con i valori così determinati di A e β .

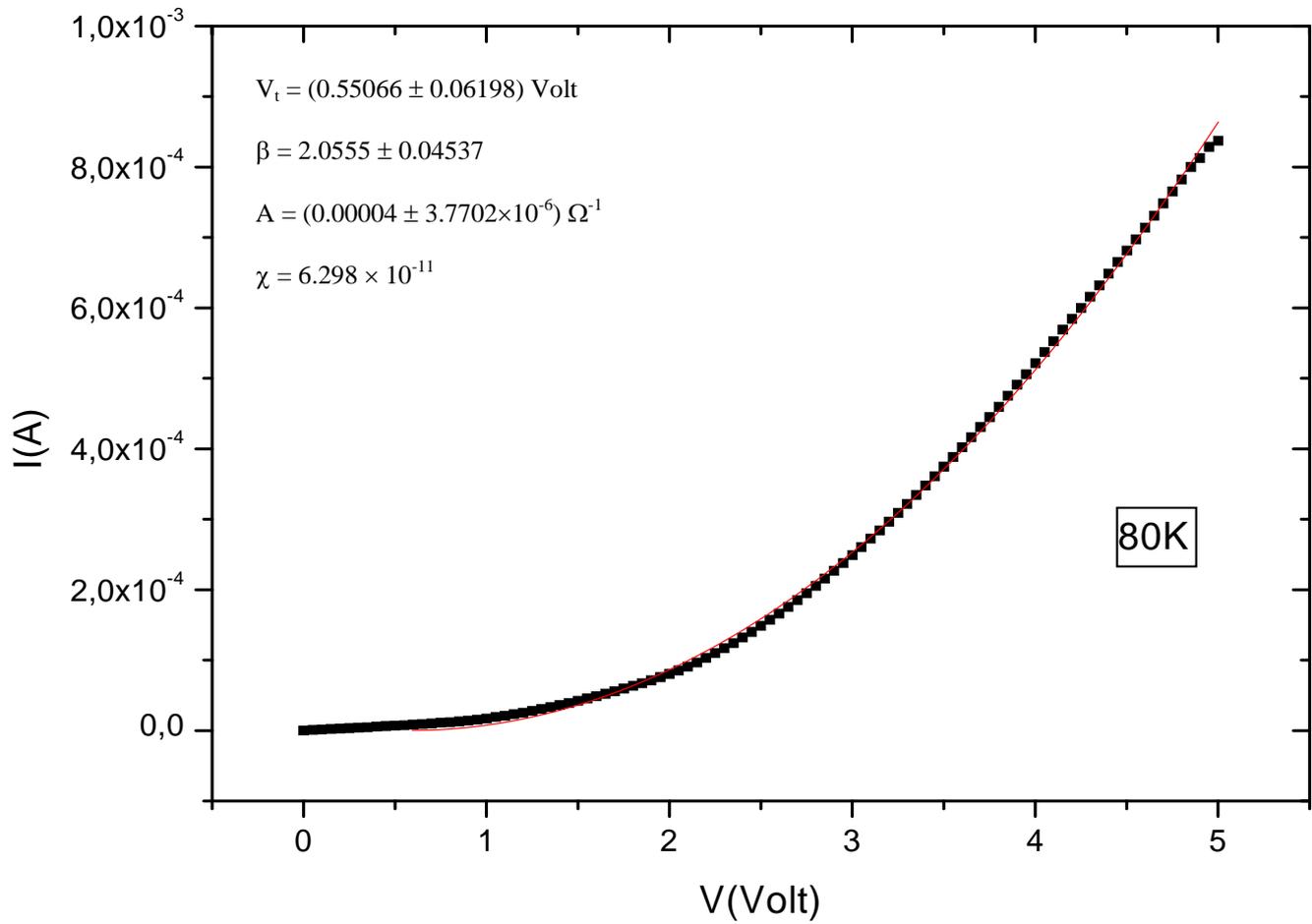


Fig.4.25 Ramo positivo della caratteristica I-V del campione A5 600 °C 3min. a 80K. I punti in nero indicano i dati sperimentali e la curva in rosso il fit.

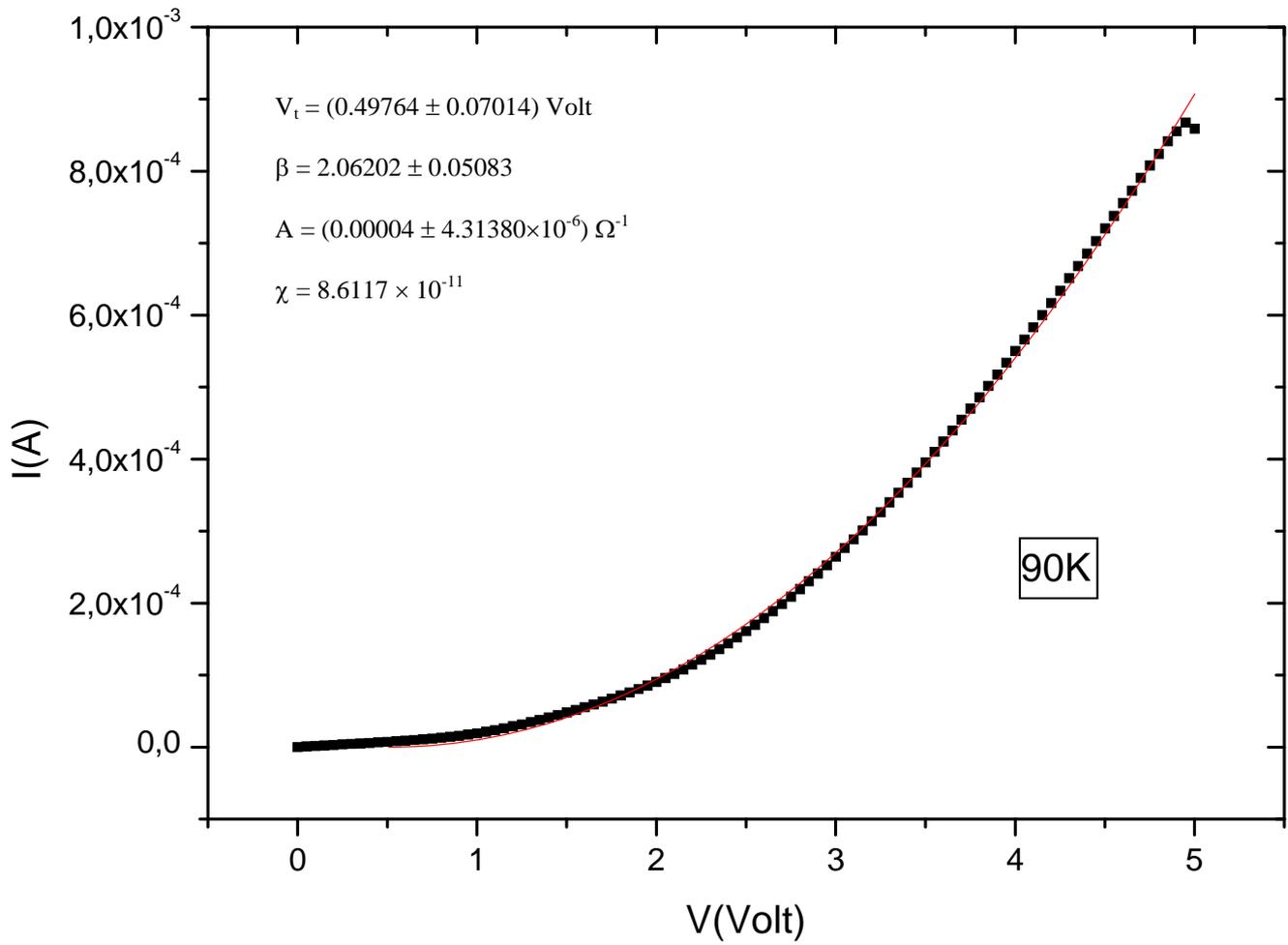


Fig.4.26 Ramo positivo della caratteristica I-V del campione A5 600 °C 3min. a 90K. I punti in nero indicano i dati sperimentali e la curva in rosso il fit.

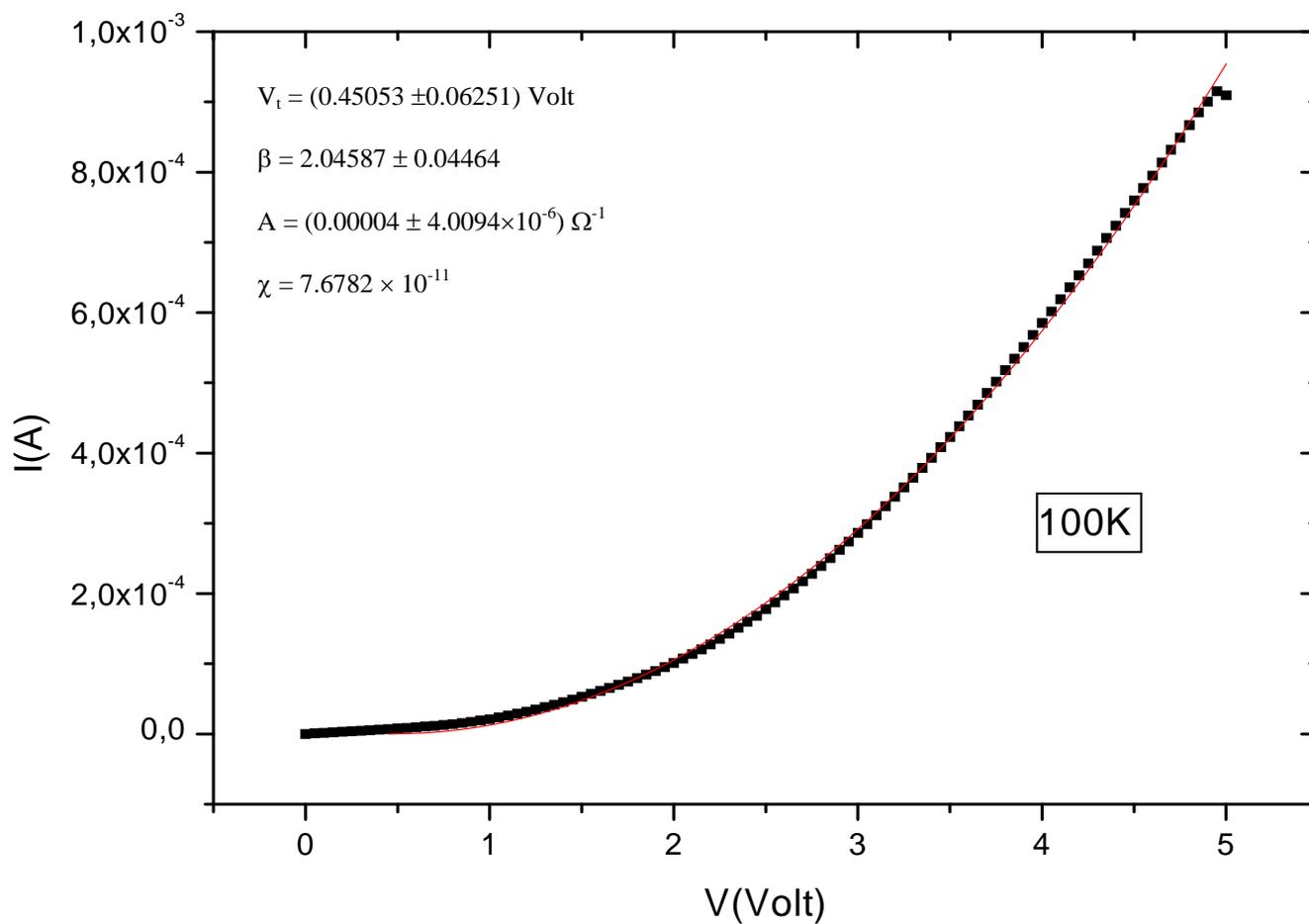


Fig.4.27 Ramo positivo della caratteristica I-V del campione A5 600 °C 3min. a 100K. I punti in nero indicano i dati sperimentali e la curva in rosso il fit.

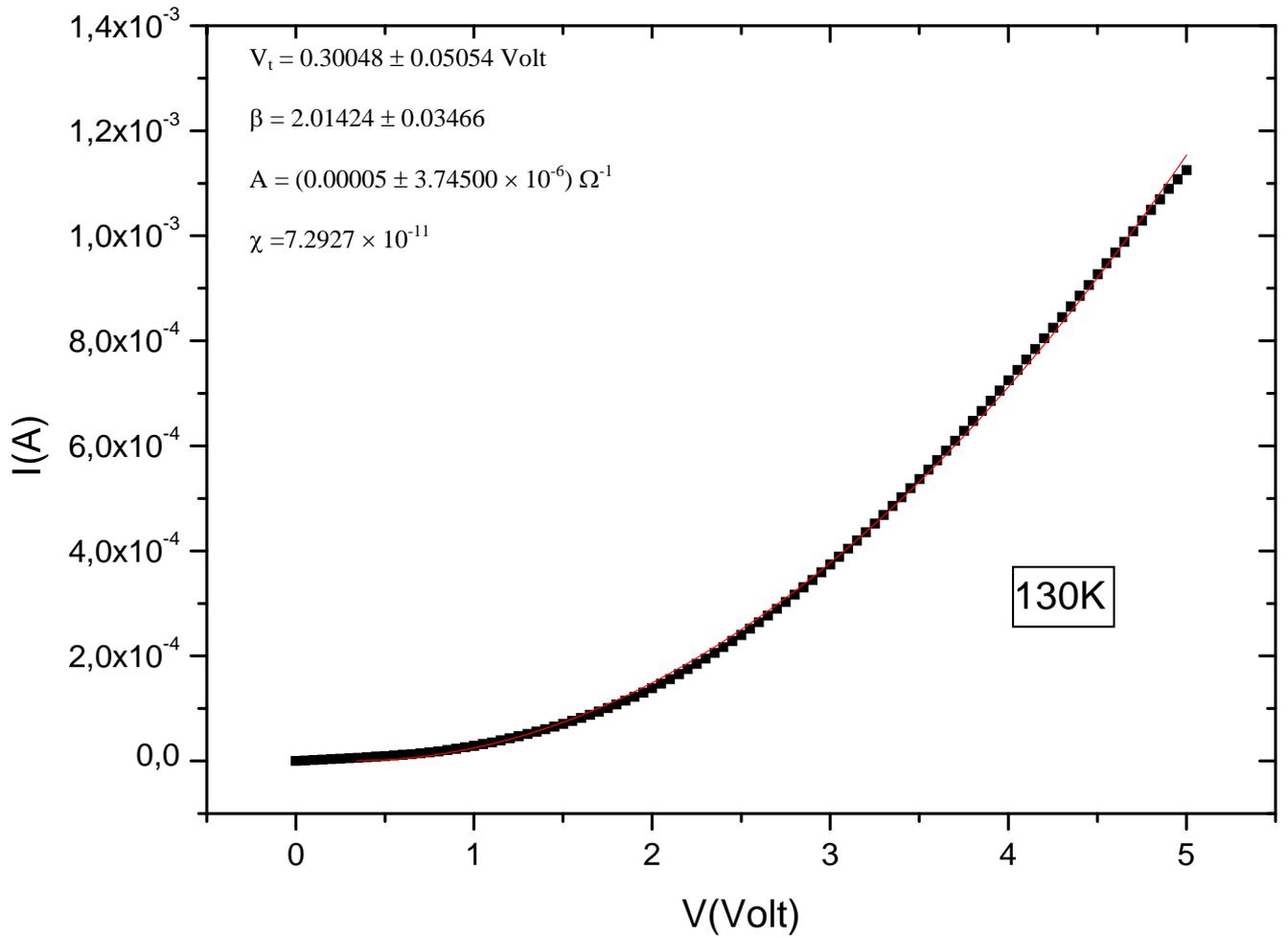


Fig.4.28 Ramo positivo della caratteristica I-V del campione A5 600 °C 3 min. a 130K. I punti in nero indicano i dati sperimentali e la curva in rosso il fit.

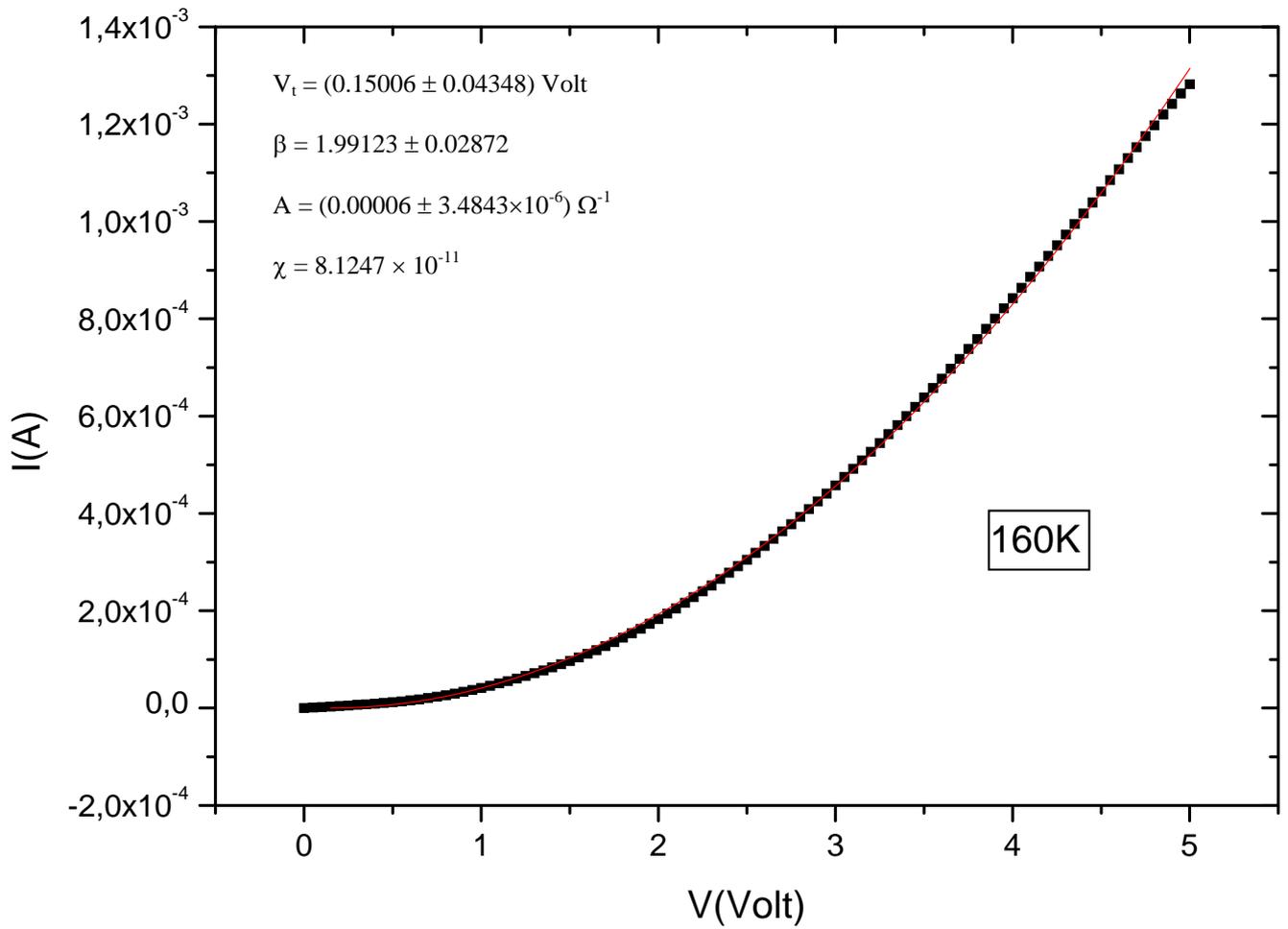


Fig.4.29 Ramo positivo della caratteristica I-V del campione A5 600 °C 3min. a 160K. I punti in nero indicano i dati sperimentali e la curva in rosso il fit.

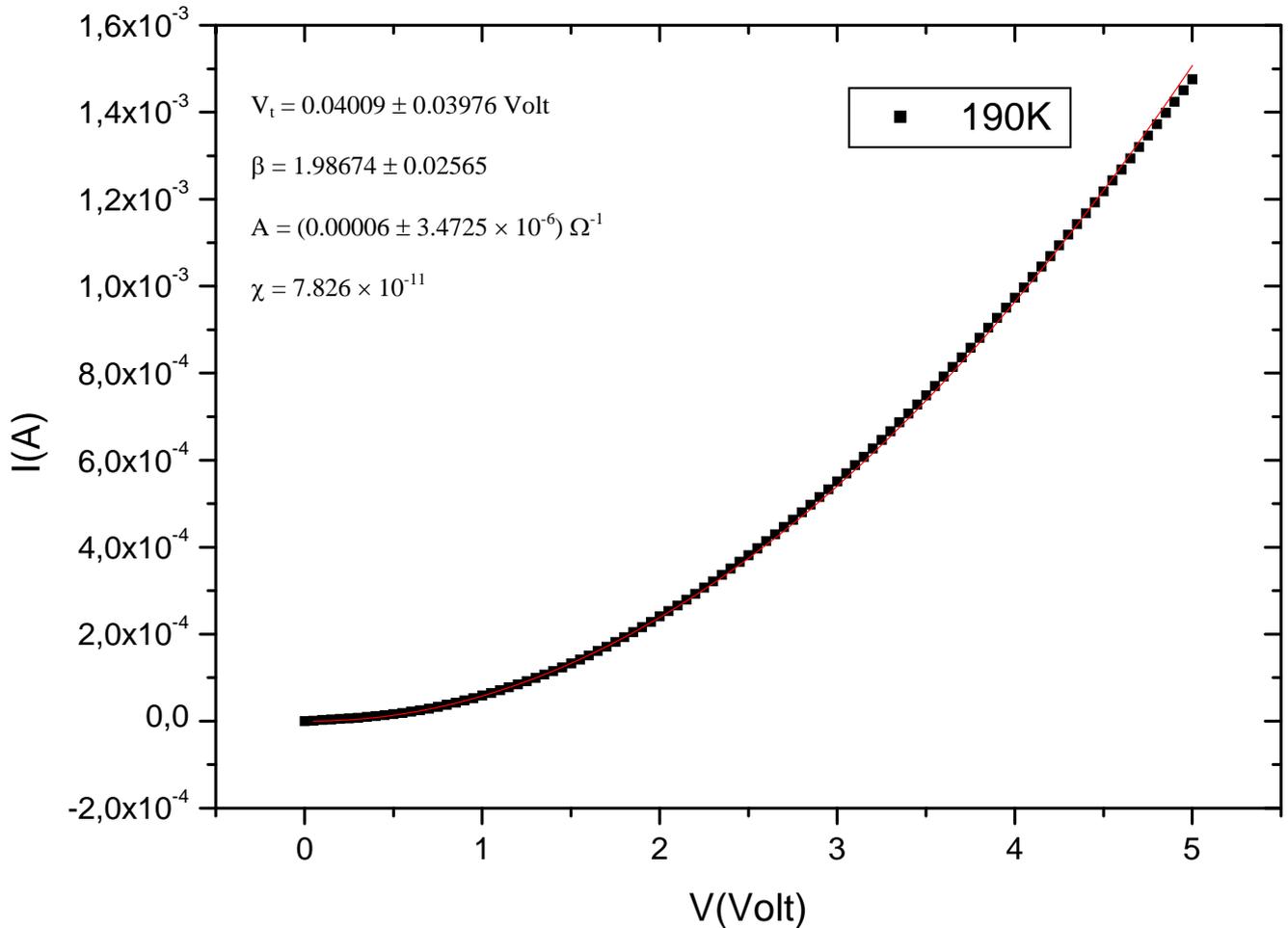


Fig.4.30 Ramo positivo della caratteristica I-V del campione A5 600 °C 3min. a 190K. I punti in nero indicano i dati sperimentali e la curva in rosso il fit.

In generale tutte le caratteristiche misurate tra 70K e 180K risultano ben fittate dalla forma funzionale $I = A(V-V_t)^\beta$ con $\beta \approx 2$, come previsto dal modello teorico di Middleton e Wingreen per un sistema il cui trasporto elettronico avvenga bidimensionalmente (il fatto che nel campione qui analizzato il trasporto possa avvenire bidimensionalmente può essere confermato da una TEM in cross dello stesso campione: dato che essa mostra che la struttura del campione mantiene ancora un forte “ricordo” della iniziale struttura a multilayer, per cui i grani sono pressoché disposti lungo dei piani, è

ragionevole supporre che il trasporto elettronico avvenga bidimensionalmente lungo tali piani).

Inoltre è possibile plottare l'andamento del potenziale di soglia in funzione della temperatura ottenendo quanto riportato in fig.4.31

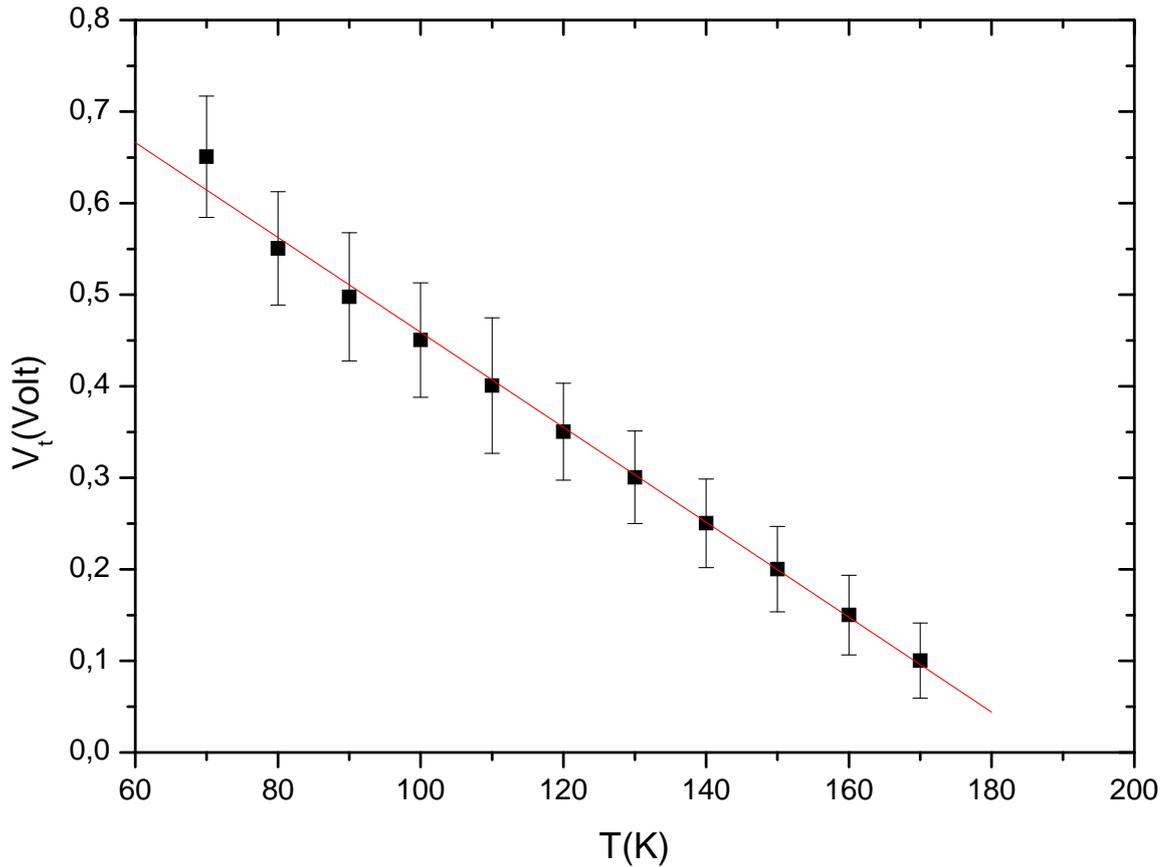


Fig.4.31 Andamento del potenziale di soglia in funzione della temperatura per il campione A5 600 °C 3 min.

Da questo plot e dal relativo fit lineare si ricava

$$V_t(T) = (0.977081 \pm 0.014989) - (0.005183 \pm 1.11407 \times 10^{-4})T \quad (4.2)$$

come indicato dalla (3.24) e cioè che il potenziale di soglia decresca linearmente con la temperatura.. Da qui si può stimare la temperatura T^* per cui $V_t(T^*) = 0$. Tale stima dà

$$T^* \approx 190K \quad (4.3).$$

Per $T \geq 190K$ si sono considerati i potenziali di soglia praticamente nulli rispetto a quelli misurati per temperature minori (e quindi le curve I-V per tali temperature si sono considerate essere praticamente delle rette passanti per l'origine con pendenza che aumenta all'aumentare della temperatura).

Anche la (3.25) secondo cui la conduttanza differenziale è $G(T \geq T^*, V \rightarrow 0) \propto \exp(-\frac{U}{k_B T})$, con energia di attivazione $U = 2.4k_B T^*$

sembra trovare conferma come indicato dal grafico di figura 4.30. Per costruire tale grafico si è fissato un potenziale opportunamente piccolo ($V \approx 0.80000$ Volt) e dalle caratteristiche I-V si è calcolata la conduttanza del sistema $G = dI/dV$ a temperature maggiori di $T^* \approx 190K$.

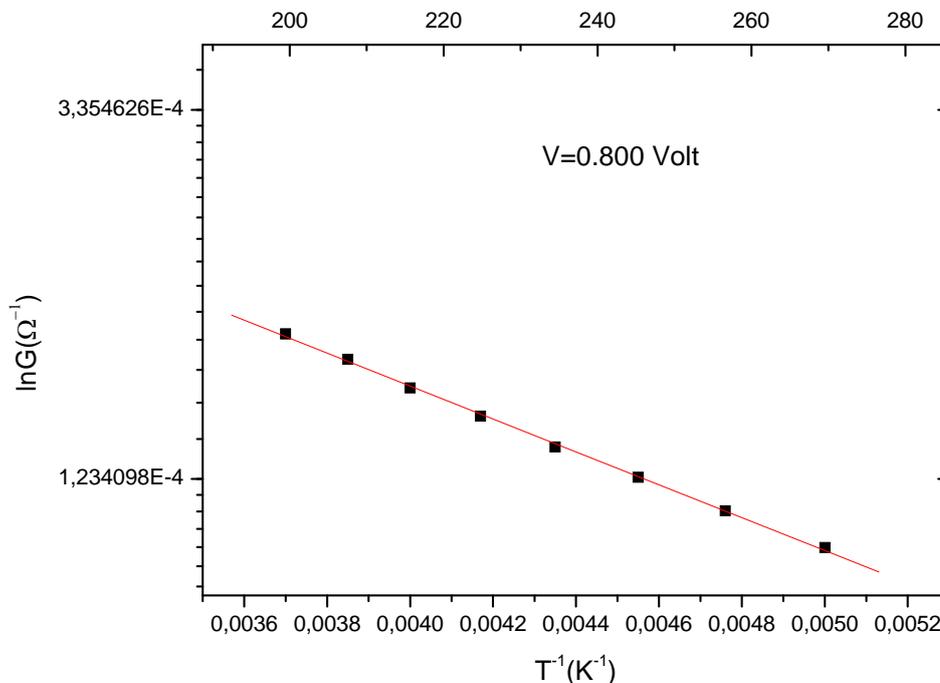


Fig.4.32 Grafico che rappresenta la forma attivata termicamente della conduttanza del campione A5 600 °C 3 min. , per temperature maggiori di $T^* \approx 190K$ e per un potenziale opportunamente piccolo.

Dal fit lineare su questo grafico si ricava:

$$\ln G = (-6.965215 \pm 0.02556) + (-445.764638 \pm 5.918851)T^{-1} \quad (4.4)$$

da cui una energia di attivazione pari a $U \approx 38.4472 \pm 0.51$ meV mentre la $U = 2.4k_B T^*$ con $T^* = 190$ K permette di prevedere $U \approx 39.33$ meV: i due dati, sperimentale e teorico, sono, quindi, in ottimo accordo.

4.5 CONCLUSIONI

Il risultato fondamentale di quanto esposto nel presente capitolo è che i dati sperimentali da noi raccolti ed analizzati relativamente al trasporto elettronico nel campione descritto in 4.2 sembrerebbero essere in ottimo accordo con quanto previsto dalla teoria generale esposta nel capitolo III ed in generale del tutto analoghi ai dati sperimentali usualmente presenti in letteratura sui sistemi descritti nella seconda 3.3 del terzo capitolo. Tutto ciò non è banale se si considera la diversità tra questi sistemi: i sistemi in genere studiati in letteratura sono sistemi costituiti da un numero relativamente limitato di nanocristalli (dell'ordine del migliaio) e caratterizzati da un altrettanto relativamente limitato stato di disordine, mentre il campione da noi analizzato è, in confronto a questi, un sistema ben più caotico in quanto costituito da un numero di nanocristalli molto maggiore (la densità degli stessi è dell'ordine di 10^{12} nanocristalli per cm^2). Nonostante questa differenza, non deve stupire il fatto che la teoria illustrata nel capitolo III riesca spiegare bene i dati sperimentali relativi alle varie tipologie dei campioni: essa è, infatti, indipendente dal numero di dots costituenti il sistema.

La ragione principale per cui in genere i sistemi studiati, e presenti in letteratura, sono costituiti da un numero relativamente basso di dots è quella di poter avere un valido confronto tra i dati sperimentali e i dati ottenuti da modelli simulativi. Comunque, come mostra l'analisi svolta sul campione da

noi analizzato, la condizione di un basso numero di dots costituenti il sistema non è assolutamente necessaria. Naturalmente più sia grande il numero di dots costituenti il sistema più l'analisi dei dati sperimentali può divenire complessa, ma in ogni caso ci aspettiamo che i risultati fondamentali della teoria esposta nel capitolo III rimangano validi.

CONCLUSIONI

In questo lavoro di tesi si sono studiate le proprietà generali di trasporto di elettroni, sottoposti esclusivamente ad un campo elettrico, in sistemi nanostrutturati, con particolare riferimento teorico e sperimentale a sistemi disordinati di nanocristalli metallici. Il lavoro sperimentale originale è consistito nello studio di tali proprietà (Coulomb blockade) in un sistema granulare costituito da grani metallici di TiSi_2 in matrice di Si. Il risultato fondamentale di questo studio è che i dati sperimentali I-V raccolti su tale campione sono consistenti, in linea generale, sia con i modelli teorici comunemente utilizzati per descrivere il trasporto elettronico in sistemi di nanocristalli metallici che con i dati sperimentali comunemente presenti in letteratura su tali tipologie di sistemi, sebbene i sistemi comunemente trattati in letteratura presentino alcune differenze rispetto a quello analizzato in questo lavoro. La differenza strutturale tra il campione analizzato in questo lavoro e quelli generalmente presenti in letteratura si ripercuote sostanzialmente sulla legge $V_t \frac{C_0}{e} = \alpha \left(\frac{C}{C_0} \right) N$. Essa è generalmente valida per i sistemi di nanocristalli metallici che abbiano N sufficientemente piccolo (dell'ordine di qualche centinaio) e con $\alpha \left(\frac{C}{C_0} \right) \approx \frac{1}{2}$. Per il nostro campione tale legge, applicata con $N \sim 10^{12}$ grani/cm², porterebbe a valori di V_t assurdamente elevati. La non applicabilità di detta legge al campione da noi analizzato è ragionevolmente imputabile ad una troppo semplicistica schematizzazione dei sistemi in studio data dai modelli teorici esposti nel terzo capitolo in relazione alla complessità strutturale presentata dal campione da noi analizzato. Ad esempio detta semplicistica schematizzazione porta ad una troppo semplicistica valutazione delle capacità C e C_0 (ad esempio le immagini TEM planari mostrano chiaramente che molti grani sono ben lungi dall'essere approssimabili ad una forma sferica e la valutazione di C come capacità di un condensatore piano è sicuramente una approssimazione non troppo buona ma sicuramente la più semplice). Mentre dette capacità giocano un ruolo fondamentale nel

regime di trasporto tunnelling degli elettroni attraverso il campione ciò non accade nel regime di trasporto “over barrier”. Così esse influenzano le caratteristiche di trasporto in tale regime pur non alterando i suoi fenomeni fisici di base (e cioè sostanzialmente la caratteristica di *scaling behavior* e la decrescita lineare di V_t con la temperatura), mentre non pesano in modo sostanziale sulla forma attivata termicamente della conduttanza differenziale del sistema nel regime di trasporto “over barrier” (dato che in tale regime le proprietà di trasporto elettronico non dipendono in modo importante dall’energia di carica dei dots costituenti il sistema).

Nel corso di questo lavoro si sono volute mettere in evidenza le caratteristiche più importanti degli effetti di elettrone singolo in sistemi nanostrutturati in particolar modo facendo riferimento a sistemi disordinati, dato che il disordine, la cui natura è stata specificata durante lo stesso studio, costituisce, oggi, una delle limitazioni più forti per lo sviluppo della nanotecnologia. Si accenna al fatto che in questo campo gli sforzi intellettuali e tecnologici maggiori sono rivolti alla ideazione di dispositivi che siano, quanto il più possibile, insensibili al suddetto disordine: è evidente come ciò comporti preliminarmente una approfondita conoscenza degli effetti che questo fattore ha sulle proprietà di elettrone singolo la cui comprensione, seppur semplificata, è stato uno dei temi fondamentali del presente lavoro.

Come detto, i dati I-V sul campione originale analizzato, suggeriscono che il trasporto elettronico attraverso esso possa essere interpretato, con le dovute limitazioni sopra evidenziate, secondo i modelli teorici anch’essi analizzati in questo lavoro. In particolare si vuol far notare l’effetto della temperatura (anch’essa trattata come una fonte di disordine): dato che, ancor oggi, gli effetti della temperatura nella loro totalità sul trasporto elettronico in sistemi di nanocristalli metallici in presenza anche di disordine strutturale non sono del tutto compresi e che questo tipo di analisi non è che all’inizio, il passo successivo nello studio di campioni della stessa tipologia di quello da analizzato potrebbe essere proprio quello di approfondire maggiormente lo studio dell’effetto della temperatura sulle loro caratteristiche I-V.

In sintesi, questo lavoro di tesi, partendo dalla descrizione dei classici lavori teorici e sperimentali relativi al campo della nanoscienza ha avuto

CONCLUSIONI

l'obiettivo primario ed originale di applicare alcuni dei concetti ad essa relativi per l'interpretazione di dati sperimentali inerenti ad un sistema (quello di grani nanometrici di TiSi_2 in Si) anch'esso del tutto originale rispetto ai soliti sistemi di nanocristalli metallici presenti e studiati in letteratura.

APPENDICE A

TEORIA DEL TUNNELLING

TRANSPORT PER

L'ANALISI DEL FENOMENO DI

COULOMB

BLOCKADE:

“MASTER EQUATION” [9, 18]

In questa appendice si vuole proporre un approccio al fenomeno di Coulomb blockade alternativo a quello proposto nei paragrafi 2.3.7 e 2.3.8. Mentre in questi ultimi paragrafi, l'analisi è stata basata su ragionamenti di tipo semiclassico, si vuole qui accennare ad una analisi sicuramente più complessa ma anche più rigorosa che utilizza i concetti tipici della meccanica quantistica unitamente ai concetti base della teoria del tunnelling transport esposta nel capitolo I (non è altro che la teoria originale, nell'ambito del modello ortodosso, sviluppata da K. K. Likharev, A. N. Korotkov, D. V. Averin per la spiegazione degli effetti di elettrone singolo). Si consideri un tipico sistema SET ed il suo circuito equivalente come rappresentato in figura a.1.

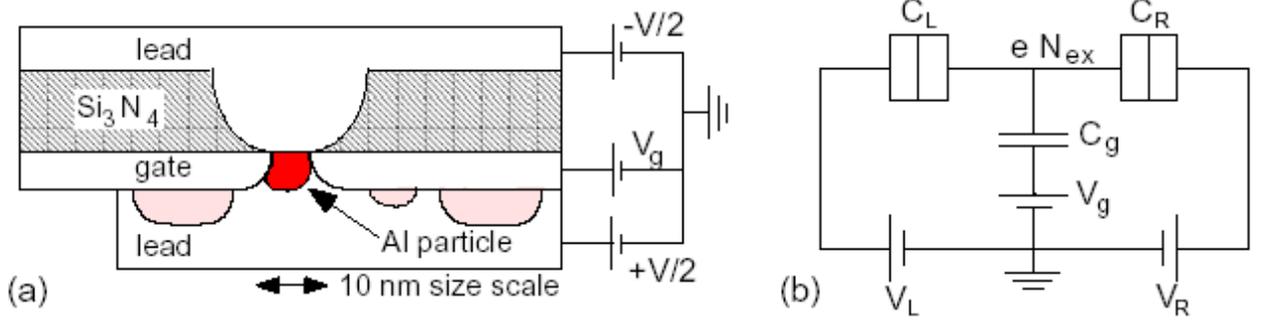


Fig.a.1 (a) Tipica realizzazione sperimentale di un SET. (b) Rappresentazione circuitale di un SET. N_{ex} indica il numero di elettroni in eccesso entro il dot rispetto alla situazione di equilibrio.[18]

Nell'ipotesi in cui il sistema sia in regime di Coulomb blockade classico la Hamiltoniana totale dello stesso può essere espressa nella forma

$$\hat{H} = \hat{H}_L + \hat{H}_R + \hat{H}_D + \hat{H}_{tun} \quad (a.1)$$

essendo

$$\hat{H}_r = \sum_{k\sigma} (E_{kr} + eV_r) c_{kr\sigma}^\dagger c_{kr\sigma} \quad \text{con } r = L, R \quad (a.2)$$

$$\hat{H}_D = \sum_{\alpha} (eV_D N_{ex} + E_{\alpha}) |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (a.3)$$

$$\hat{H}_{tun} = \sum_{r=L,R} \sum_{kl\sigma} T_{kl\sigma}^r c_{k\sigma}^\dagger c_{l\sigma D} + c.c. = \sum_{r=L,R} \sum_{k\sigma, \alpha\alpha'} T_{k\sigma, \alpha\alpha'}^r c_{k\sigma}^\dagger |\alpha\rangle\langle\alpha'| + c.c. \quad (a.4)$$

$$T_{k\sigma, \alpha\alpha'}^r = \sum_l T_{kl\sigma}^r \langle\alpha| c_{l\sigma D} |\alpha'\rangle \quad (a.5)$$

con:

$$V_D = \frac{q_D + q_0}{C} \quad \text{potenziale elettrostatico sul dot;}$$

$q_D = \sum_{r=L,R,g} C_r V_r$ è la carica accumulata o sull'elettrodo di sinistra ($r = L$) o

sull'elettrodo di destra ($R = R$) o sull'elettrodo di gate ($r = g$);

$$C = C_L + C_R + C_g ;$$

q_0 è la carica indotta nel dot dalle cariche parassite;

$c_{k\sigma}^\dagger$ è l'operatore che crea un elettrone con spin σ nell'elettrodo $r = L,R,g$ con energia cinetica E_{kr} e con energia potenziale eV_r ;

$|\alpha\rangle$ è un autostato del dot isolato quando in questo vi sia un numero di elettroni pari a N_α e in assenza di fenomeni di tunnelling degli stessi elettroni;

$T_{kl\sigma}^r$ sono gli elementi della matrice di trasmissione, la quale descrive la trasmissione degli elettroni attraverso il dot.

È intuitivo capire che:

\hat{H}_r rappresenta l'energia totale elettrostatica dell'elettrodo $r = L, R, g$;

\hat{H}_D rappresenta l'energia totale elettrostatica del dot;

\hat{H}_{tun} rappresenta la variazione di energia totale del dot in conseguenza ad un evento di tunnelling che porta il dot stesso dallo stato $|\alpha\rangle$ allo stato $|\alpha'\rangle$;

l'autovalore corrispondente all'autostato $|\alpha\rangle$ è $eV_D N_{ex,\alpha} + E_\alpha$.

Averin e Korotkov hanno mostrato[76] che se il dot si trova in stato normale ed in assenza di interazione a molti corpi, valgono le seguenti espressioni:

$$\hat{H}_D = E_{pot}(N_{ex}) + \sum_{l\sigma} E_{l\sigma D} n_{l\sigma D}^{(\alpha)} \quad (a.6)$$

$$|\alpha\rangle = \left| \left\{ n_{l\sigma D}^{(\alpha)} \right\} \right\rangle \quad (a.7)$$

$$E_\alpha = E_C N_{ex,\alpha}^2 + \sum_{l\sigma} E_{l\sigma D} n_{l\sigma D}^{(\alpha)} \quad (a.8)$$

essendo

$$E_{pot}(N_{ex}) = eV_D N_{ex} + E_C N_{ex}^2 \quad (\text{a.9})$$

e con $c_{l\sigma}^\dagger$ l'operatore che crea uno stato elettronico $|\alpha\rangle$ nel dot con energia cinetica E_α e con uno specifico set di numeri di occupazione $\{n_{l\sigma}^{(\alpha)}\}$.

Si può, inoltre, mostrare che la teoria perturbativa applicata all'operatore \hat{H}_{tun} permette di ottenere la relazione

$$\frac{2\pi}{\hbar} \sum_k T_{kl\sigma}^{r*} T_{kl'\sigma}^r \delta(w - E_{kr}) \approx \delta_{ll'} \Gamma_{l\sigma}^r \quad (\text{a.10})$$

che rappresenta la rate totale di tunnelling elettronico dall'elettrodo r allo stato $|lr\rangle$ del dot.

Alla luce di quanto detto, si può dimostrare che l'operatore associato alla corrente trasportata dall'elettrodo r al dot e definito da

$$\hat{I}_r = -e \frac{\partial \hat{N}_r}{\partial t} \quad (\text{a.11})$$

(N_r descrive il numero di elettroni che hanno operato complessivamente tunnelling dall'elettrodo r al dot) è esprimibile come

$$\hat{I}_r = ie [\hat{N}_r, \hat{H}] = ie \sum_{k\alpha, \alpha'} T_{k\sigma, \alpha\alpha'}^r c_{k\sigma}^\dagger |\alpha\rangle \langle \alpha'| + c.c. \quad (\text{a.12}).$$

Introdotta l'operatore densità di probabilità elettronica $\hat{\rho}$ e definito l'operatore

$$\hat{P} = Tr_{L,R}(\hat{\rho}) \quad (\text{a.13})$$

i cui elementi diagonali sono $P_\alpha = \langle \alpha | \hat{P} | \alpha \rangle$ e che rappresentano ciascuno la probabilità di trovare il dot nello stato elettronico $|\alpha\rangle$, si può mostrare che

$$I_r = e \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{p=1}^{\infty} p (\Gamma_{\alpha\alpha'}^{r+p} - \Gamma_{\alpha\alpha'}^{r-p}) P_\alpha \quad (\text{a.14})$$

essendo $\Gamma_{\alpha\alpha'}^{r+p}$ la rate di tunnelling di p elettroni dall'elettrodo r al dot e $\Gamma_{\alpha\alpha'}^{r-p}$ la rate di tunnelling di p elettroni dal dot all'elettrodo r . L'equazione (a.14) è detta "master equation".

Allorché la resistenza di tunnelling sia molto maggiore del quanto di resistenza si può mostrare, utilizzando la regola d'oro di Fermi⁽⁵⁾, che

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\alpha'}^{r+1} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k\sigma} f(E_{kr}) |T_{k\sigma,\alpha\alpha'}^{r*}|^2 \delta(E_\alpha - E_{\alpha'} + eV_D - E_{kr} - eV_r) = \\ &= f(E_\alpha - E_{\alpha'} - e\bar{V}_r) \Gamma_{\alpha\alpha'}^{r+} \end{aligned} \quad (\text{a.15})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\alpha'}^{r-1} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k\sigma} [1 - f(E_{kr})] |T_{k\sigma,\alpha\alpha'}^r|^2 \delta(E_\alpha - E_{\alpha'} - eV_D + E_{kr} + eV_r) = \\ &= f(E_\alpha - E_{\alpha'} + e\bar{V}_r) \Gamma_{\alpha\alpha'}^{r-} \end{aligned} \quad (\text{a.16})$$

avendo definito

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}^{r+} = \sum_{l\sigma} \Gamma_{l\sigma}^r |\langle \alpha | c_{l\sigma}^\dagger | \alpha' \rangle|^2 \quad (\text{a.17})$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}^{r-} = \sum_{l\sigma} \Gamma_{l\sigma}^r |\langle \alpha | c_{l\sigma} | \alpha' \rangle|^2 \quad (\text{a.18})$$

la funzione di Fermi

$$f(E) = \frac{1}{e^{k_B T} + 1} \quad (\text{a.19})$$

e la differenza di potenziale tra l'elettrodo r ed il dot

$$\bar{V}_r = V_r - V_D \quad (\text{a.20}).$$

Dalle equazioni (a.15) e (a.16) si può ricavare il seguente notevole risultato: per semplicità, senza perdere di generalità, si supponga $V_L = -V_R = V/2$ (è il caso standard di un circuito “simmetrico”); allora, le suddette equazioni, quando sia fissato V_g e a $T \rightarrow 0$, mostrano che al variare di V le rates di tunnelling sono non nulle (e quindi è possibile il passaggio di corrente attraverso il dispositivo) solo quando si realizzi la condizione

$$\pm e\bar{V}_r \geq E_\alpha - E_{\alpha'} \quad (\text{a.21})$$

che quindi definisce il potenziale di soglia per la conduzione attraverso il sistema

$$\bar{V}_{L,R} = \frac{1}{C} \left[\pm V(C_{R,L} + \frac{C_g}{2}) - V_g C_g - q_0 \right] \quad (\text{a.22}).$$

Questo non è altro che il potenziale di soglia caratteristico del fenomeno di Coulomb blockade.

In conclusione, quindi, le equazioni (a.15) e (a.16) riescono a dare la spiegazione di questo fenomeno.

APPENDICE B

DERIVAZIONE E PROPRIETÁ DELL'EQUAZIONE DI KARDAR- PARISI-ZHANG E RELAZIONE CON IL MODELLO DI MIDDLETON E WINGREEN[32, 69]

Lo scopo dell'equazione di KPZ è quello di descrivere l'evoluzione temporale del profilo di una interfaccia che cresca in presenza di disordine e le proprietà ad essa connesse. I risultati di un tale studio, sono anche associabili alla "crescita" dei cammini di conduzione in sistemi di clusters e più in generale a tutti quei processi di crescita in cui interviene una zona o superficie che presenti "scaling properties".

Di seguito si procede alla descrizione della derivazione dell'equazione: data la specificità e la complessità di tale derivazione, si descrivono qui solo i suoi punti principali, rimandando ai riferimenti bibliografici per ulteriori approfondimenti.

Si supponga che il profilo di una interfaccia sia descritto da una funzione $h(\bar{x}, t)$ (funzione altezza): essa indichi la forma del profilo dell'interfaccia quando questa si trovi nella posizione \bar{x} al tempo t . La teoria generale di crescita di una interfaccia prevede che la crescita locale del profilo dell'interfaccia sia governata da una equazione differenziale non lineare[84]. La più semplice equazione differenziale non lineare di Langevin per la crescita locale del profilo è data da[84]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(\vec{x}, t) \quad (\text{b.1})$$

Il significato dei vari termini di questa equazione è di seguito riportato:

$\nu \nabla^2 h$: descrive il rilassamento dell'interfaccia a causa di una tensione superficiale ν ;

$\frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2$: descrive la crescita non lineare dell'interfaccia in presenza di disordine. In particolare λ , detta costante di accoppiamento, è il termine che descrive quanto una determinata configurazione di disordine influisca sul moto ordinato (in assenza di disordine) dell'interfaccia; in altri termini, essa dà l'intensità dell'accoppiamento tra il moto ordinato dell'interfaccia ed il disordine;

$\eta(\vec{x}, t)$: è una funzione che descrive la configurazione del disordine presente nel punto \vec{x} all'istante t.

Per semplicità si suppone che $\eta(\vec{x}, t)$ abbia una distribuzione gaussiana con $\langle \eta(\vec{x}, t) \rangle = 0$ e

$$\langle \eta(\vec{x}, t) \eta(\vec{x}', t') \rangle = 2D \delta^d(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \quad (\text{b.2})$$

essendo D il coefficiente di diffusione delle particolari particelle costituenti l'interfaccia che diffondono attraverso il particolare mezzo in esame, e d il numero di dimensioni del sistema in cui l'interfaccia si muove.

Si osservi che l'equazione (b.1) è invariante per traslazioni definite da $h \rightarrow h + \text{costante}$, ed obbedisce alla riparametrizzazione infinitesimale

$$h \rightarrow h + \vec{\varepsilon} \times \vec{x}, \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \lambda \vec{\varepsilon} t$$

che descrive la rotazione dell'interfaccia di un piccolo angolo.

L'equazione (b.1) può essere riscritta in altre due utili equivalenti forme.

La prima segue dall'utilizzo della trasformazione $W(\vec{x}, t) = \exp\left[\left(\frac{\lambda}{2\nu}\right)h(\vec{x}, t)\right]$ che permette di riscrivere la (b.1) come

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \nu \nabla^2 W + \left(\frac{\lambda}{2\nu}\right)\eta(\vec{x}, t)W \quad (\text{b.3})$$

che può essere vista come una equazione di diffusione in presenza del potenziale $W(\vec{x}, t)$ dipendente dal tempo in modo casuale.

La seconda segue dall'utilizzo della trasformazione $\vec{v} = -\nabla h$ e che permette di riscrivere la (b.1) nella forma

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \lambda \vec{v} \times \nabla \vec{v} = \nu \nabla^2 \vec{v} - \nabla \eta(\vec{x}, t) \quad (\text{b.4}).$$

Nel caso particolare in cui sia $\eta(\vec{x}, t) = 0$ la (b.3) è esattamente risolvibile. In tal caso essa, con la particolare condizione al contorno $h(\vec{x}, 0) = h_0(\vec{x})$ dà come soluzione

$$h(\vec{x}, t) = \frac{2\nu}{\lambda} \ln \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d \xi}{(4\pi\nu t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left[-\frac{(\vec{x} - \xi)^2}{4\nu t} + \frac{\lambda}{2\nu} h_0(\vec{x})\right] \right\} \quad (\text{b.5}).$$

Si può, inoltre, mostrare che la forma asintotica (cioè per $t \rightarrow \infty$) della (b.5) è composta da segmenti di paraboloide (ciascuno della forma $h_n = A_n - \frac{(\vec{x} - \xi_n)^2}{2\lambda t}$) connessi tra di essi e con discontinuità in ∇h .

La figura b.1 mostra la schematizzazione del tipico avanzamento del profilo di una interfaccia unidimensionale, con rappresentato anche il comportamento asintotico, come stabilito dalla (b.5).

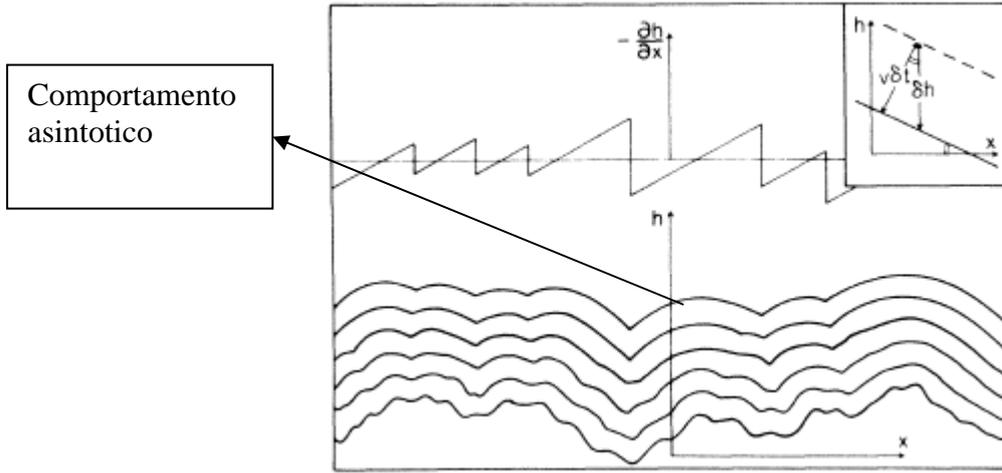


Fig.b.1 Profili successivi di crescita di una interfaccia unidimensionale come indicato dalla (b.5). L'inserto indica come la crescita avvenga localmente lungo la normale alla stessa interfaccia.[69]

Si vuole, ora, cercare di risolvere il problema completo stabilito con la (b.1). La metodologia più utile per questa risoluzione è quella suggerita dal formalismo della teoria di "renormalization group"⁽⁶⁾[85] applicato al comportamento di scala di fluttuazioni dipendenti dal tempo. Si riassumono brevemente i risultati:

è possibile riscrivere la trasformata spaziale di Fourier della (b.1) nel modo seguente

$$h(\vec{k}, t) = G_0(\vec{k}, t)h(\vec{k}, 0) + \int_0^t d\tau G_0(\vec{k}, t - \tau) \left[\eta(\vec{k}, \tau) - \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \vec{q} \times (\vec{k} - \vec{q}) h(\vec{q}, \tau) h(\vec{k} - \vec{q}, \tau) \right] \quad (b.6).$$

Questa equazione integrale può essere risolta perturbativamente utilizzando il propagatore libero⁽⁷⁾

$$G_0(\vec{k}, t) = \exp(-vk^2 t)\theta(t) \quad (b.7)$$

e

$$\langle \eta(\vec{k}, t) \eta(\vec{k}', t) \rangle = 2D\delta^d(\vec{k} + \vec{k}')\delta(t - t') \quad (b.8).$$

La teoria di “renormalization group” permette di riscaldare opportunamente i parametri \vec{k}' e t' rispettivamente rispetto a \vec{k} e t e la funzione $h'(\vec{k}', t')$ rispetto alla $h(\vec{k}, t)$ nel seguente modo

$$\vec{k}' = e^l \vec{k} \quad (\text{b.9})$$

$$t' = e^{-z l} t \quad (\text{b.10})$$

$$h'(\vec{k}', t') = e^{-(d+\chi)l} h(\vec{k}, t) \quad (\text{b.11})$$

con l, z, χ opportuni esponenti.

Queste operazioni di riscaldamento dei parametri hanno come conseguenza il fatto che le grandezze v, D, λ presenti in (b.1) debbano soddisfare le seguenti condizioni

$$\frac{dv}{dl} = \left[z - 2 + K_d \bar{\lambda}^2 \frac{2-d}{4d} \right] v \quad (\text{b.12})$$

$$\frac{dD}{dl} = \left[z - d - 2\chi + \frac{K_d \bar{\lambda}^2}{4} \right] D \quad (\text{b.13})$$

$$\frac{d\lambda}{dl} = [\chi + z - 2] \lambda \quad (\text{b.14})$$

essendo K_d una opportuna costante che dipende da d (numero di dimensioni del sistema in cui l'interfaccia si propaga) e $\bar{\lambda}$ la *costante di accoppiamento efficace* definita da

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{\lambda^2 D}{v^3} \quad (\text{b.15}).$$

Gli esponenti z e χ vengono determinati imponendo le condizioni $\frac{dv}{dl} = \frac{dD}{dl} = 0$. Imponendo tali condizione in (b.12) e (b.13), ricavando così le espressioni di z e χ ed infine sostituite queste ultime nella (b.14) si ottiene l'equazione KPZ:

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dl} = \frac{2-d}{2} \bar{\lambda} + K_d \frac{2d-3}{4d} \bar{\lambda}^3 \quad (\text{b.16}).$$

Essa permette di determinare la costante di accoppiamento per ogni fissata configurazione di disordine e quindi permette di stabilire come tale disordine influisca sull'evoluzione temporale dell'interfaccia.

Gli esponenti z e χ descrivono completamente il comportamento di scala dell'interfaccia.

Il fatto interessante è che simulazioni numeriche e dati sperimentali[69] sembrerebbero mostrare che il comportamento di scala esibito dalla crescita stocastica di una interfaccia sia indipendente da d (*comportamento universale*). Infatti, tali dati indicano, qualunque sia d , che

$$z \approx \frac{3}{2} \quad (\text{b.17}).$$

$$\chi \approx \frac{1}{2}$$

Un altro fatto particolarmente interessante è che z può essere legato a quello che viene detto *coefficiente idrodinamico* η secondo la relazione[32]

$$\eta = \frac{1}{z} \quad (\text{b.18}).$$

Nell'ambito della teoria di Middleton e Wingreen si può osservare che l'esponente β presente in $I \propto (V - V_t)^\beta$, è legato a η da $\beta = \eta + 1$ [32], cosicché

$$\beta = \frac{1}{z} + 1 = \frac{5}{3} \quad (\text{b.19}).$$

Gli esperimenti condotti sui sistemi presi in esame dal modello di Middleton e Wingreen (sistemi di nanocristalli metallici 1d e 2d) danno in effetti:

per $d = 1$: $\beta \approx 1$; [32]

per $d = 2$: $\beta \approx 2$; [32].

APPENDICE C

CALCOLO DELLA DENSITÀ DI GRANI IN UN FILM

Questa appendice è dedicata all'illustrazione del metodo di calcolo della densità di grani in un film granulare con particolare riferimento al campione da noi descritto ed analizzato nel capitolo IV. Riferendoci in particolare ad esso, ma il discorso è del tutto generalizzabile, si può affermare che la frazione in volume dei grani di TiSi_2 nel campione è per definizione

$$Q = \frac{V_{\text{TiSi}_2}}{V_{\text{film}}} \quad (\text{c.1})$$

essendo

V_{TiSi_2} il volume complessivo dei grani di TiSi_2 presenti nel film e V_{film} il volume dello stesso film.

Si supponga di conoscere la distribuzione $D(r)$ dei suddetti grani.

Evidentemente $\int_0^{\infty} D(r)dr$ rappresenta il numero totale di grani contenuti nel

film. Allora, se $V(r)$ è il volume del singolo grano in funzione del suo raggio, Q può essere scritta come

$$Q = \frac{\int_0^{\infty} D(r)V(r)dr}{V_{\text{film}}} \quad (\text{c.2}).$$

Moltiplicando numeratore e denominatore della suddetta relazione per il numero dei grani presenti nel film, si ottiene immediatamente

$$Q = \frac{\int_0^{\infty} D(r) dr}{V_{film}} \times \frac{\int_0^{\infty} D(r)V(r) dr}{\int_0^{\infty} D(r) dr} = n_{grani} \times \bar{V}_{grano} \quad (c.3)$$

essendo n_{grani} la densità volumica dei grani e \bar{V}_{grano} il volume medio di un grano.

La quantità n_{grani} è per definizione data da

$$n_{grani} = \frac{N_{grani}}{V_{film}} = \frac{\rho_{Ti}}{\bar{N}_{Ti}^{TiSi_2}} \quad (c.4)$$

essendo N_{grani} il numero totale di grani di $TiSi_2$ presenti nel campione, ρ_{Ti} la densità di atomi di Ti nel film, $\bar{N}_{Ti}^{TiSi_2}$ il numero medio di atomi di Ti in un singolo grano di $TiSi_2$.

Inoltre, se $(Nt)_{Ti}$ è la densità areale del Ti, $\rho_{Ti}^{TiSi_2}$ è la densità di Ti nel $TiSi_2$ (pari a 2.2×10^{22} atomi/cm³) e t_{film} è lo spessore del film, allora n_{grani} può essere espressa da

$$n_{grani} = \frac{(Nt)_{Ti}}{t_{film}} \times \frac{1}{\rho_{Ti}^{TiSi_2} \times t_{film}} \quad (c.5).$$

Infine, allora, Q può essere espresso da

$$Q = n_{grani} \times \bar{V}_{grano} = \frac{(Nt)_{Ti}}{\rho_{Ti}^{TiSi_2} \times t_{film}} \quad (c.6).$$

Dato che le quantità $(Nt)_{Ti}$ e t_{film} sono direttamente misurabili tramite analisi RBS allora Q è di conseguenza misurabile.

In particolare i valori di $(Nt)_{Ti}$ e t_{film} ($\approx 2500 \text{ \AA}$) ricavati dalle suddette analisi RBS hanno permesso di determinare $Q \sim 10^{12} \text{ grani/cm}^2$.

NOTE

(1): In altri termini è sufficiente sfruttare la relazione

$$(1+T)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}T - \frac{1}{8}T^2.$$

(2) Fisicamente, la “seed tunnelling rate” può essere intesa come la rate di tunnelling di ogni singola barriera del sistema quando questa sia isolata dalle altre.

(3) La funzione di Bessel modificata di ordine 0 (e di seconda specie, come qui viene intesa) è definita da:

$$K_0(x) = -\left\{ \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right\} I_0(x) + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots$$

essendo $I_0(x)$ la funzione di Bessel di ordine zero definita da

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots$$

(4) La funzione $\theta(E(S) - E(S'))$ è la funzione gradino definita da:

$$\begin{aligned} \theta(E(S) - E(S')) &= 1 && \text{per } E(S) - E(S') > 0 \\ \theta(E(S) - E(S')) &= 0 && \text{per } E(S) - E(S') < 0. \end{aligned}$$

(5) Si ricorda che la regola d'oro di Fermi è esprimibile come:

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{if}|^2 \delta(E_f - E_i)$$

essendo $\Gamma_{i \rightarrow f}$ la probabilità per unità di tempo (rate) che un elettrone passi dallo stato iniziale $|i\rangle$ ad energia E_i allo stato finale $|f\rangle$ ad energia E_f , e V_{if} l'elemento di matrice che accoppia i due stati.

(6) La teoria di “renormalization group” riguarda tutti quei sistemi che presentino “scaling properties”: il concetto di base di tale teoria è quello per cui le leggi fisiche che regolano il comportamento di questi sistemi mantengano invariata la loro forma anche quando tutti i coefficienti in esse presenti vengano riscritti per opportuni coefficienti.

(7) Si accenna al fatto che un propagatore libero non è altro che il nucleo di un opportuno operatore lineare.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, edito da John Wiley & Sons, New York, 1966.
- [2] Franco Bassani, Umberto M. Grassano, *Fisica dello stato solido*, edito da Bollati Boringhieri, Torino, 2000.
- [3] Hermann Haken, Hans C. Wolf, *Fisica atomica e quantistica*, edito da Bollati Boringhieri, Torino, 1990.
- [4] Jhon C. Slater, *Teoria quantistica della Materia*, edito da Zanichelli, Bologna, 1980,
- [5] Simone Franchetti, Anedio Ranfagni, Daniela Mugnai, *Elementi di struttura della Materia*, edito da Zanichelli, Bologna, 1986.
- [6] Jun Jhon Sakurai, *Meccanica Quantistica Moderna*, edito da Zanichelli, Bologna, 1990.
- [7] Paul Adrien M. Dirac, *I Principi della Meccanica Quantistica*, edito da Bollati Boringhieri, Torino, 1976.
- [8] Jhon H. Davies, *The Physics of Low-Dimensional Semiconductors*, edito da Cambridge University Press, 1998.
- [9] David K. Ferry, Stephen M. Goodnick, *Transport in nanostructures*, edito da Cambridge University Press, 1997.
- [10] Vladimir V. Mitin, Viatcheslav A. Kochelap, Michael A. Stroschio, *Quantum Heterostructures*, edito da Cambridge University Press, 1999.

[11] C. G. Smith, *Low-Dimensional Quantum Devices*, Rep. Prog. Phys. Vol. 59, pag. 235-282, 1996.

[12] T. J. Thornton, *Mesoscopic Devices*, Rep. Prog. Phys. Vol 57, pag. 311-364, 1994.

[13] Philip Moriarty, *Nanostructured Materials*, Rep. Prog. Phys. Vol. 64, pag. 297-381, 2001.

[14] Nicolás Agraït, Alfredo Levy Yeyati, Jan M. van Ruitenbeek, *Quantum Properties of Atomic-Sized Conductors*, Physics Reports vol. 377, pag. 81-279, 2003.

[15] S. Washburn, R. A. Webb, *Quantum Transport in Small Disordered Samples from the Diffusive to the Ballistic Regime*, Rep. Prog. Phys. Vol. 55, pag. 1311-1383, 1992.

[16] S. A. Gurvitz, *Rate Equations for Quantum Transport in Multi-Dot Systems*, arXiv: cond-mat/9702071, 1997.

[17] Leo P. Kouwenhon, Charles M. Marcus, Paul L. McEuen, Seigo Tarucha, Robert M. Westervelt, Ned S. Wingreen, *Electron Transport in Quantum Dots*, pubblicato in proceedings of the Advanced Study Institute on Mesoscopic Electron Transport edito da L.L.Sohn, L.P. Kouwenhoven, G. Schon (Kluwer 1997).

[18] Jan von Delft, D. C. Ralph, *Spettroscopy of Discrete Energy Levels in Ultrasmall Metallic Grains*, arXiv:cond-mat/0101019, 2001.

[19] K. A. Matveev, L. I. Glazman, H. U. Baranger, *Coulomb Blockade of Tunnelling through a Double Quantum Dot*, Phys. Rev. B, vol. 54, NO. 8, pag. 5637, 1996.

[20] Kostantin Likharev, *Electronics Below 10 nm*, edito in Nano and Giga Challenges in Microelectronics, Elsevier, 2003.

[21] Kostantin Likharev, *Single-Electron Devices and their Applications*, edito in proceedings of the IEEE, vol. 87, pag. 606-632, 1999.

[22] Alexander N. Korotkov, *Coulomb Blockade and Digital Single Electron Devices*, pubblicato in: Molecular electronics, edito da J. Jortner e M.A. Ratner (Blackwed Oxford).

[23] T.A. Fulton, G.J. Dolan, *Observation of Single Electron Charging Effects in Small Tunnel Junctions*, pubblicato in Phys. Rev. Lett. Vol. 59, NO.1, pag. 109, 1987.

[24] A. Alan Middleton, Ned S. Wingreen, *Collective Transport in Arrays of Small Metallic Dots*, Phys. Rev. Lett. Vol. 71, NO. 19, pag. 3198, 1993.

[25] Cem Ibrahim Duruoz, *Low Temperature Transport in Quantum Dot Arrays*, pubblicato da UMI Company, 1996.

[26] C. Reichhardt, C. J. Olson Reichhardt, *Charge Transport Transitions and Scaling in Disordered Arrays of Metallic Dots*, arXiv: cond-mat/0205532, 2002.

[27] Raghuveer Parthasarathy, Xiao-Min Lin, Klara Elteto, T.F. Rosenbaum, Heinrich M. Jaeger, *Finite Temperature Electron Transport in Metal Nanocrystal Arrays*, arXiv:cond-mat/0302348, 2003.

[28] M. G. Ancona, W. Kruppa, R. W. Rendell, A. W. Snow, D. Park, J. B. Boos, *Coulomb Blockade in Single-Layer Au Nanocluster films*, Phys. Rev. B, Vol. 64, pag. 033408, 2001.

[29] A. J. Rimberg, T. R. Ho, John Clarke, *Scaling Behavior in the Current-Voltage Characteristic of One- and Two-Dimensional Arrays of Small Metallic Islands*, Phys. Rev. Lett. Vol. 74, NO. 23, pag. 4714, 1995.

[30] C. Kurdak, A. J. Rimberg, T. R. Ho, John Clarke, *Activated Transport and Scaling Behavior in the Current-Voltage Characteristics and Coulomb Blockade Oscillations of Two-Dimensional Arrays of Metallic Islands*, Phys. Rev. B, vol. 57, NO. 12, pag. R6842, 1998.

[31] A. S. Cordan, Y. Leroy, A. Goltzenè, A. Pèpin, C. Vieu, M. Mejias, H. Launois, *Temperature Behavior of Multiple Tunnel Junction Devices Based on Disordered Dot Arrays*, Journal of Applied Physics, Vol. 87, NO. 1, pag. 345, 2000.

[32] Raghuveer Parthasarathy, Xiao-Min Lin, Heinrich M. Jaeger, *Electronic Transport in Metal Nanocrystal Arrays: The Effect of Structural Disorder on Scaling Behavior*, Phys. Rev. Lett. Vol. 87, NO. 18, pag. 186807-1, 2001.

[33] L. Clarke, M. N. Wybourne, L.O. Browne, J. E. Hutchison, M. Yan, S. X. Cai, J. F. W. Keana, *Room Temperature Coulomb Blockade Dominated Transport in Gold Nanocluster Structures*, Semicond. Sci. Technol. Vol. 13, pag. A111-A114, 1998.

[34] Daniel M. Kaplan, Victor A. Sverdlov, Kostantin K. Likharev, *Subelectron Transport in Single-Electron-Tunnelling Arrays*, Phys. Rev. B, Vol. 65, pag. 193309, 2002.

[35] C. Reichhardt, C. J. Olson Reichhardt, *Temperature and ac Effects on Charge Transport in Metallic Arrays of Dots*, arXiv: cond-mat/0305149, 2003.

[36] Dietrich Stauffer, Amnon Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, edito da Taylor & Francis Ltd, Londra, 1985.

[37] E. Bar-Sadeh, Y. Goldstein, C. Zhang, H. Deng, B. Abeles, O. Millo, *Single Electron Tunnelling in Granular Metal Films*, Phys. Rev. B, vol. 50, NO.12, pag. 8961, 1994.

[38] K. B. Efetov, A. Tschersich, *Coulomb Effects in Granular Materials at not very low Temperatures*, arXiv: cond-mat/0302257, 2003.

[39] Alexander Atland, Leonid I. Glazman, Alex Kamenev, *Electron Transport in Granular Metals*, arXiv: cond-mat/0305246, 2003.

[40] D. Davidovic , A. Anaya, A. L. Korotkov, M. Bowman, *Electron Transport in Metallic Grains*, arXiv: cond-mat/0202372, 2002.

[41] A. N. Korotkov, *Analytical Calculation of Single-Electron Oscillations in One-Dimensional Arrays of Tunnel Junctions*, Phys. Rev. B, Vol. 50, NO.23, pag. 17674, 1994.

[42] C. A. Stafford, S. Das Sarma, *Collective Coulomb Blockade in an Array of Quantum Dots: A Mott-Hubbard Approach*, Phys. Rev. Lett. Vol. 72, NO. 22, pag. 3590, 1994.

[43] D. P. Arovas, F. Guinea, C. P. Herrero, P. San Josè, *Granular Systems in the Coulomb Blockade Regime*, arXiv: cond-mat/0211686, 2002.

[44] Dmitri S. Golubev, Andrei D. Zaikin, *Electron Transport through Interacting Quantum Dots*, arXiv: cond-mat/0307161, 2003.

[45] Vidar Gudmundsson, Andrei Manolescu, Roman Krahne, Detlef Heitmann, *From Single Dots to Interacting Arrays*, arXiv: cond-mat/0110323, 2001.

- [46] R. Wetzler, A. Wacker, E. Schöll, *Self-Consistent Coulomb Effects and Charge Distribution of Quantum Dot Arrays*, arXiv: cond-mat/0303026, 2003.
- [47] T. Junno, S. B. Carlsson, H. Q. Xu, L. Samuelson, A. O. Orlov, G.L. Snider, *Single-Electron Tunnelling Effects in a Metallic Double Dot Devices*, Applied Physics Letters vol. 80, NO. 4, pag. 667, 2002.
- [48] I. Gómez, F. Dominguez-Adame, E. Diez, P. Orellana, *Transport in Random Quantum Dot Superlattice*, arXiv: cond-mat/0203255, 2003.
- [49] David M. T. Kuo, G.Y. Guo, Yia Chung Chang, *Tunnelling Current through a Quantum Dot Array*, Applied Physics Letters Vol. 79, NO. 23, pag. 3851, 2001.
- [50] D. S. Norikov B. Kozinsky, L. S. Levitov, *Ordered and Disordered States in a Quantum Dot Array*, arXiv: cond-mat/0111345, 2001.
- [51] Kostantin K. Likharev, *Correlated Discrete Transfer of Single Electrons in Ultrasmall Tunnel Junctions*, IBM Journal of Research and Development, 1988.
- [52] D. V. Averin, A. A. Odintsov, *Macroscopic Quantum Tunnelling of the Electric Charge in Small Tunnel Junctions*, Phys. Rev. A Vol. 140, NO. 5, pag. 251, 1989.
- [53] J. Lambe, R. C. Jaklevic, *Charge Quantisation Studies Using a Tunnel Capacitor*, Phys. Rev. Lett. Vol. 22, NO. 25, pag. 1371, 1969.
- [54] I. O. Kulik, R. I. Shekhter, *Kinetic Phenomena and Charge Discreteness Effects in Granular Media*, Soviet Physics JEPT, Vol. 41, NO. 2, pag. 308, 1975.

- [55] D. V. Averin, K. K. Likharev, *Coulomb Blockade of Single Electron Tunnelling and Coherent Oscillations in Small Tunnel Junctions*, Journal of Low Temperature Physics, Vol. 62, No. 3, pag. 345, 1986.
- [56] K. Mullen, E. Ben Jacob, R. C. Jaklevic, Z. Schuss, *I-V Characteristics of Coupled Ultrasmall-Capacitance Normal Tunnel Junctions*, Phys. Rev. B, Vol. 37, NO. 1, pag. 98, 1988.
- [57] D. V. Averin, K. K. Likharev, *Single Electronics*, edito in Quantum Effects in Small Disordered Systems edito da Elsevier, Amsterdam, 1990.
- [58] S. E. Kubatkin, A. V. Danilov, A. L. Bogdanov, H. Olin, T. Clacson, *Coulomb Blockade Effects at Room Temperature in Thin-Film Nanoconstrictions Fabricated by a Novel Technique*, Applied Physics Letters Vol. 73, NO. 24, pag. 3604, 1998.
- [59] A. N. Cleland, J. M. Schmidt, J. Clarke, *Charge Fluctuations in Small Capacitance Junctions*, Phys. Rev. Lett. Vol.64, NO. 13, pag. 1565, 1991.
- [60] L.E. Glazman, R. I. Shekhter, *Coulomb Oscillations of the Conductance in a Laterally Confined Heterostructure*, Journal of the Physics Condensed Matter, Vol. 1, pag. 5811-5815, 1989.
- [61] D. V. Averin, A. N. Korotkov, K. K. Likharev, *Theory of Single-Electron Charging of Quantum Wells and Dot*, Phys. Rev. B Vol. 44, NO. 12, pag. 6199, 1991.
- [62] B. Su, V. J. Goldman, J. E. Cunningham, *Single Electron Tunnelling in Nanometer Scale Heterostructures Devices*, Phys. Rev. B Vol. 46, NO.12, pag. 7644, 1992.

[63] M. Tewordt, *Single Electron Tunnelling and Coulomb Charging Effects in Asymmetric Double Barrier Resonant Tunnelling Diodes*, Phys. Rev. B Vol. 45, NO. 24, pag. 14407, 1992.

[64] B. Abeles, P. Sheng, M. D. Coutts, Y. Arie, *Structural and Electrical Properties of Granular Metal Films*, Advances in Physics, Vol. 24, pag. 407, 1975.

[65] M. Matters, J. J. Versluys, J.E. Mooij, *Electron-Hole Transport in Capacitively 1D Arrays of Small Tunnel Junctions*, Phys. Rev. Lett. Vol. 78, NO. 12, pag. 2469, 1997.

[66] P. Delsing, C. D. Chen, D. B. Haviland, T. Bergsten, T. Claeson, *Two Dimensional Arrays of Low Capacitance Tunnel Junctions: General Properties, Phase Transitions and Hall Effect*, arXiv: cond-mat/9805121, 1998.

[67] C. I. Duruöz, R. M. Clarke, C. M. Marcus, J. S. Harris, *Conduction Threshold, Switching and Hysteresis in Quantum Dot Arrays*, Phys. Rev. Lett. Vol. 74, NO. 16, pag. 3237, 1995.

[68] J. E. Mooij, B. J. Van Wess, L. J. Geerligs, M. Peters, R. Fazio, G. Schön, *Unbinding Charge-Anticharge Pairs in Two Dimensional Arrays of Small Metal Junctions*, Phys. Rev. Lett. Vol. 65, NO. 5, pag. 645, 1990.

[69] Mehran Kardar, Giorgio Parisi, Yi-Cheng Zang, *Dynamic Scaling of Growing Interfaces*, Phys. Rev. Lett. Vol. 56, NO. 9, pag. 889, 1986.

[70] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, *Ordering, Metastability, and Phase Transitions in Two-Dimensional Systems*, J. Phys. C: Solid State Phys. Vol. 6, pag. 1181, 1973.

[71] J. Oh, V. Meunier, H. Ham, R. J. Nemanich, *Single-Electron Tunnelling of Nanoscale TiSi₂ Islands on Si*, Journal of Applied Physics Vol. 92, NO. 6, pag. 3332, 2002.

[72] J. Oh, R. J. Nemanich, *Current-Voltage and Imaging of TiSi₂ Islands on Si(001) Surfaces using Conductive-Tip Atomic Force Microscopy*, Journal of Applied Physics Vol. 92, NO. 6, pag. 3326, 2002.

[73] R. Landauer, *Spatial Variation of Currents and Fields due to Localized Scatterers in Metallic Conduction*, IBM J. Res. Dev. Vol.1, pag. 223-231, 1957.

[74] C. J. Gorter, *A Possible Explanation of the Increase of the Electric Resistance of Thin Metal Films at Low Temperatures and Small Field Strength*, Physica Vol. 15, pag. 777, 1951.

[75] I. Giaever, H. R. Zeller, *Superconductivity of Small Tin Particles Measured by Tunnelling*, Phys. Rev. Lett. Vol. 20, NO. 26, pag. 1504, 1968.

[76] D. V. Averin, A. N. Korotkov, *Correlated Single Electron Tunnelling Via Mesoscopic Metal Particles: Effects of Energy Quantization.*, J. Low Temp. Phys. Vol. 80, pag. 173-185, 1990.

[77] J. H. F. Scott-Thomas, S. B. Field, M. A. Kastner, H. I. Smith, D. A. Antoniadis, *Conductance Oscillations Periodic in the Density of a One-Dimensional Electron Gas*, Phys. Rev. Lett. Vol. 62, NO. 5, pag. 583, 1989.

[78] Y. Meir, N. S. Wingreen, *Landauer Formula for the Current through an Interacting Electron Region*, Phys. Rev. Lett. Vol. 68, NO. 16, pag. 2512, 1992.

- [79] Y. Meir, N. S. Wingreen, P. A. Lee, *Transport through a Strongly Interacting Electron System*, Phys. Rev. Lett. Vol. 66, NO. 23, pag. 3048, 1992.
- [80] C. W. J. Beenakker, *Theory of Coulomb Blockade Oscillations in the Conductance of a Quantum Dot*, Phys. Rev. B, Vol. 44, NO. 4, pag. 1646, 1991.
- [81] P. Delsing, *Single Charging Tunnelling*, edito da H. Grabert e M. H. Devoret nella serie NATO ASI, edizioni Plenum press, 1992.
- [82] T. S. Tighe *et al.*, *Measurements of Charge Soliton Motion in Two-Dimensional Arrays of Ultrasmall Josephson Junctions*, Phys. Rev. B, Vol. 47, NO. 2, pag. 1145-1148, 1993.
- [83] P. Delsing *et al.*, *Observation of Single Electron Tunnelling Oscillations*, Phys. Rev. B, Vol. 42, NO. 12, pag. 7439, 1990.
- [84] J. M. Burgers, *The non-linear Diffusion Equation*, edito da Riedel, Boston, 1974.
- [85] B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, S. K. Ma, *Calculation of Dynamic Critical Properties Using Wilson's Expansion Methods*, Phys. Rev. Lett., NO. 29, pag. 1548, 1972.
- [86] L. J. Geerligs, J. E. Mooij, D. V. Averin, *Observation of Macroscopic Quantum Tunnelling through the Coulomb Energy Barrier*, Phys. Rev. Lett. Vol. 65, NO.24, pag. 3037, 1990.
- [87] A. E. Hanna, M. Tinkham, *Variation of the Coulomb Staircase in a Two-Junction System by Fractional Electron Charge*, Phys. Rev. B Vol. 44, NO. 11, pag. 5919, 1991.

BIBLIOGRAFIA

[88] A. M. Piro, *Proprietà elettriche di metalli granulari in silicio policristallino*, Tesi di Laurea.

RINGRAZIAMENTI

Desidero ringraziare, innanzitutto, la Prof.essa M. G. Grimaldi per l'opportunità offertami di lavorare nel suo gruppo di ricerca, costituito da persone di grande spirito umano ed intellettuale, e quindi per l'opportunità di realizzare il presente lavoro di tesi. La realizzazione di questo non sarebbe mai stata possibile senza i Suoi innumerevoli consigli, le Sue idee ed in generale il Suo fervente spirito di ricerca e di indagine che resteranno per me sempre da ammirabile esempio.

Ma la realizzazione di questo lavoro di tesi non sarebbe stata possibile neanche senza l'aiuto, il sostegno e la guida di innumerevoli altre persone che desidero qui sinceramente ringraziare.

Il Dott. Piccitto per la sua immensa disponibilità e per il suo profondo acume intellettuale: le innumerevoli discussioni sugli argomenti teorici che con lui ho avuto, sono state di fondamentale importanza non solo per lo sviluppo di questo lavoro ma anche e soprattutto per la mia formazione intellettuale. A Lui un grazie di cuore per tutto l'aiuto che mi ha dato.

Il Dott. Piro che mi ha premurosamente, pazientemente, costantemente seguito, aiutato, sopportato ed indirizzato. Nella realizzazione di questo lavoro il Suo ruolo è stato particolarmente importante dato che questo stesso lavoro ha preso le mosse dal suo lavoro di tesi di laurea. Anche a Lui un grazie di cuore per tutto l'aiuto che mi ha dato ed un sincero augurio per il Suo futuro.

La Dott.essa Romano, che mi ha spesso pazientemente aiutato. Anche a Lei va, oltre che la mia riconoscenza, un sincero augurio per il Suo futuro.

Il Prof. Rimini e il Prof. Priolo per il Loro cortese interesse nei miei confronti che è costantemente stato per me un profondo stimolo a dare sempre il massimo.

Il Dott. LA Via per la Sua disponibilità ed il Suo prezioso aiuto.

Tra gli altri vorrei anche ringraziare in particolare alcuni miei colleghi con i quali ho condiviso questi anni di esperienza universitaria nonchè prolifiche, stimolanti e spesso divertenti conversazioni : Salvatore Plumari, Francesco

RINGRAZIAMENTI

Maccarrone, Daniele Margarone, Ferdinando Iucolano, Giuseppe Di Natale, Francesca Cappuccio.

Infine vorrei profondamente ringraziare Chi più di tutti ha permesso, con il proprio sostegno morale e pratico la realizzazione di innumerevoli miei sogni e progetti, ed a cui sono e sarò perpetuamente riconoscente: la mia Famiglia. Ad Essa è rivolta la mia più profonda gratitudine ed il mio più profondo affetto: Grazie.

Grazie a tutti coloro che qui non ho nominato ma a cui sono grato.